Solution 1. (16 points)

f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f s'annule si $2\,x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de f :

x		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\lim_{x\to-\infty}(2\,x - x^2)\,e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{2\,x - x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2 - 2\,x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{e^{-x}} = -0$$

Donc la fonction f admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x\to+\infty}(2\,x - x^2)\,e^x = -\infty$$

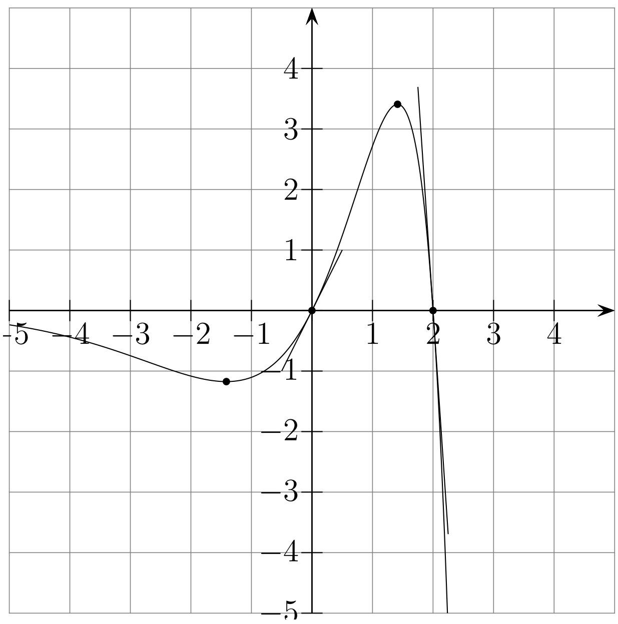
Donc la fonction f n'admet aucune asymptote horizontale à droite.

$$f'(x) = (2 - 2\,x)\,e^x + (2\,x - x^2)\,e^x = (2 - x^2)\,e^x$$

f' s'annule si $x = \pm\sqrt{2}$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(-\sqrt{2}) = (-2\,\sqrt{2} - 2)\,e^{-\sqrt{2}} \simeq -1.174$ c'est un minimum local
$f(\sqrt{2}) = (2\,\sqrt{2} - 2)\,e^{\sqrt{2}} \simeq 3.408$ c'est un maximum local



Solution 2. (10 points)

a) $f(0) = 2 > g(0) = 1$ donc le graphe no 2 est celui de f.

b) $\cos(2\,x) + 1 = \sqrt{3}\,\sin(2\,x) + 1 \Leftrightarrow \tan(2\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\,x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{6}) + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.866$ d'où A$(0.262; 1.866)$

$f(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{7\pi}{6}) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \simeq 0.134$ d'où B$(1.833; 0.134)$

c) La région se situe entre les points A et B. Le graphe de g se situe au-dessus de celui de f.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}\,\sin(2\,x) - \cos(2\,x)\,dx = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(2\,x) - \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(\pi) - \frac{1}{2}\,\sin(\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\,\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.366$$

Solution 3. (10 points)

Contrainte $2\,x \cdot y = 11200$ ou $y = \dfrac{5600}{x}$

Longueur du barbelé $3\,(2\,x + 2\,y) + 2\,x + y = 8\,x + 7\,y$

Fonction à optimiser $f(x) = 8\,x + \dfrac{39200}{x}$

Dérivée $f'(x) = 8 - \dfrac{39200}{x^2} = \dfrac{8\,(x^2 - 4900)}{x^2}$

Croissance pour $x \in]0; +\infty[$

x	-70		0		70	
$f'(x)$				$-$	0	$+$
$f(x)$				$\searrow$		$\nearrow$

Minimum lorsque $x = 70$ et $y = 80$.

L'éleveur utilise le moins de barbelé lorsque les dimensions des enclos sont de 70 m sur 80 m.

Solution 4. (10 points)

a)
$$\begin{array}{rr|l} x^2 & & x+1 \\ \cline{3-3} -x^2 & -x & x-1 \\ \cline{1-2} & -x & \\ & x \quad +1 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$
d'où $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

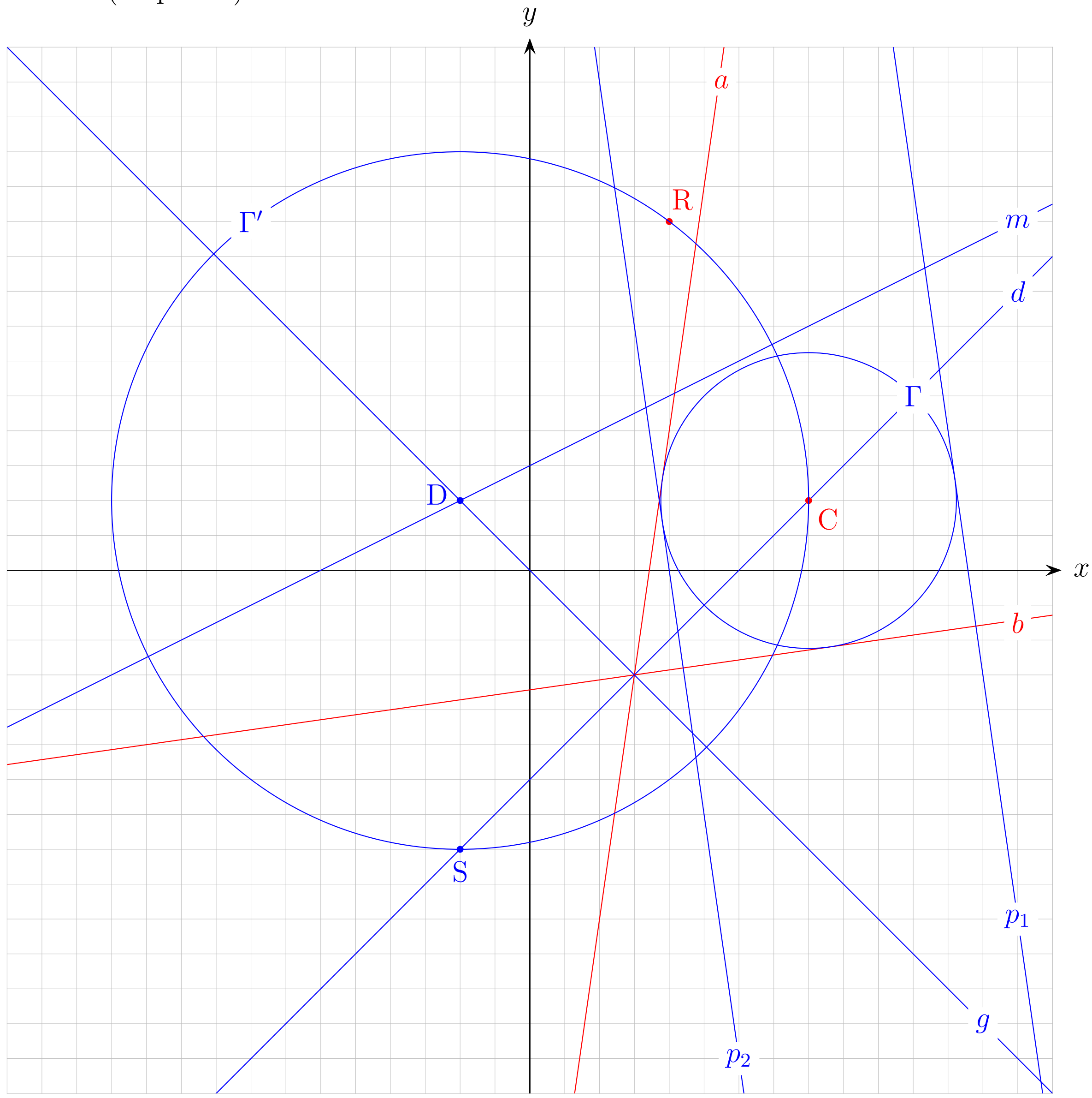
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x + \ln|x+1|$$

b) $f'(x) = \dfrac{2\,x\cdot(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2\,x}{(x+1)^2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = \frac{3}{4}$ d'où l'équation de la tangente

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,(x-1) \Leftrightarrow 3\,x - 4\,y - 1 = 0$$

Solution 5. (19 points)



a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à la médiatrice $m : x - 2\,y + c = 0$.

La droite passe par le milieu du segment CR noté M$(6; 6)$ et donc $6 - 12 + c = 0$ ou $c = 6$ et

$$m : x - 2\,y + 6 = 0$$

b) On calcule $\delta(\mathrm{C}; a) = \dfrac{|56 - 2 - 24|}{\sqrt{50}} = \dfrac{30}{5\,\sqrt{2}} = 3\,\sqrt{2}$
et $\delta(\mathrm{C}; b) = \dfrac{|8 - 14 - 24|}{\sqrt{50}} = \dfrac{30}{5\,\sqrt{2}} = 3\,\sqrt{2}$ puis on constate l'égalité.

Le cercle est de rayon $r = 3\,\sqrt{2}$ on écrit son équation $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 - 18 = 0$.

c) Le vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ à la droite b donne la direction et donc la pente -7 des tangentes.

Les tangentes à Γ de pente -7 sont d'équation $y - 2 = -7\,(x - 8) \pm 3\,\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ autrement dit

$$7\,x + y - 88 = 0 \text{ et } 7\,x + y - 28 = 0$$

d) Les équations des bissectrices sont données par $\dfrac{7\,x - y - 24}{\sqrt{50}} = \pm \dfrac{x - 7\,y - 24}{\sqrt{50}}$.
En amplifiant par $\sqrt{50}$ on obtient $7\,x - y - 24 = \pm(x - 7\,y - 24)$ autrement dit

$$8\,x - 8\,y - 48 = 0 \text{ qui s'écrit } x - y - 6 = 0$$

$$\text{et } 6\,x + 6\,y = 0 \text{ qui s'écrit } x + y = 0$$

e) $x + y = 0$ passe par O$(0; 0)$ car $0 + 0 = 0$ c'est la droite g.

La perpendiculaire à g par C est l'autre bissectrice.

Elles se coupent si $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2\,x = 6 \\ y = -x \end{cases}$ donc en $(3; -3)$.

Le symétrique est donc S$(-2; -8)$.

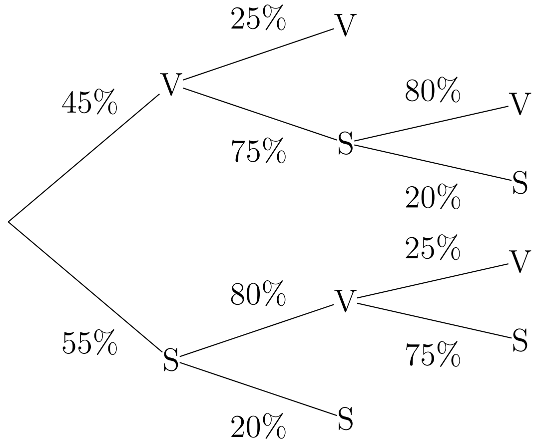
f) L'intersection est $\begin{cases} x - 2\,y + 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3\,x = -6 \\ y = -x \end{cases}$ donc D$(-2; 2)$.

C'est le centre du cercle recherché. Son rayon est $r' = ||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|| = 10$.

Son équation est $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 - 100 = 0$.

Solution 6. (15 points)

a)



b) $P(VV) = 0.45 \cdot 0.25 = 11.25\%$

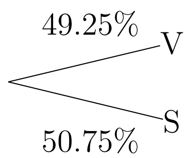
c) $P(VV \cup VSV \cup SVV) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 49.25\%$

d) $P(VV \cup SS) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.2 = 22.25\%$

e) $P(SVV \cup SVS \cup SS | VSS \cup SVS \cup SS) = \dfrac{P(SVS \cup SS)}{P(VSS \cup SVS \cup SS)}$

$$= \frac{0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2}{0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.2 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2} = \frac{0.44}{0.5075} = 86.7\%$$

f)



$$P(5\,V\ 7\,S) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0.4925^5 \cdot 0.5075^7 = 19.9\%$$