

(P1) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-2x+1} = \frac{2x^3}{(x-1)^2}$

Signe

x	0	1
$2x^3$	-	+
$(x-1)^2$	+	+
$f(x)$	-	+

puissance impaire: même signe que sans la puissance
puissance paire: 0, || ou +

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ si il y a une AV, c'est en $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \frac{2}{0} = \pm \infty \Rightarrow x=1$ AV

(si on avait obtenu $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{nombre}$ alors on aurait eu un trou (1; nombre)).
le degré du numérateur ($2x^3$) est 3, celui du dénominateur 2 et comme $3 = 2 + 1$ on a une AO

AO: $\frac{2x^3}{x^2-2x+1} = 2x+4 + \frac{6x-4}{x^2-2x+1}$

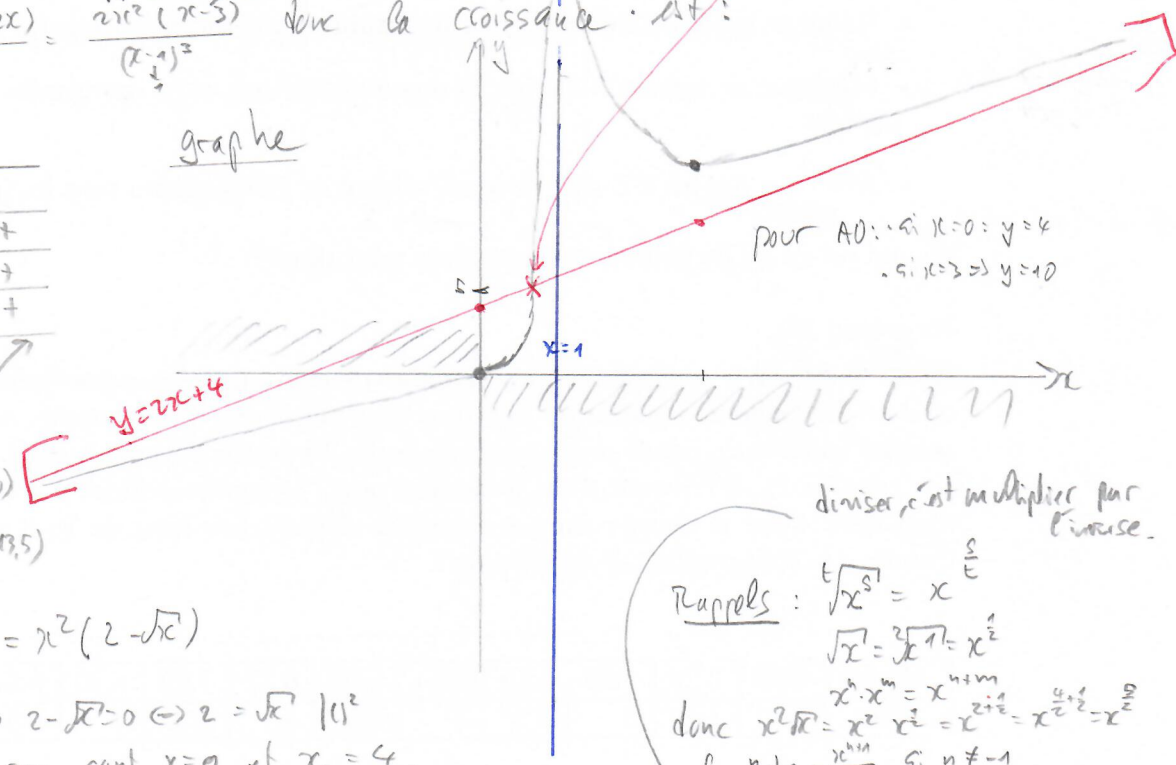
donc $y=2x+4$: AO et $S(x) = \frac{6x-4}{x^2-2x+1} (= f(x) - "2x+4")$
le graphe est l'AO s'intersectant si $S(x)=0$ donc en $6x-4=0$
 $\Leftrightarrow 6x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ donc au point $(\frac{2}{3}; 2 \cdot \frac{2}{3} + 4) = (\frac{2}{3}; \frac{4}{3} + 4) = (\frac{2}{3}; \frac{16}{3})$

Rappels: une AV et le graphe ne s'intersectent JAMAIS.
 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ et $(f(x)^n)' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

La dérivée est donc $f'(x) = \frac{(2x^3)'(x-1)^2 - 2x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1)^2 - 4x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{6x^2 - 2x^3}{(x-1)^3}$
 $f'(x) = \frac{2x^2(3x-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ donc la croissance est:

graphe

x	0	1	3
$2x^2$	+	+	+
$x-3$	-	-	+
$(x-1)^3$	-		+
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗	↘	↗



$f(0) = 0 \Rightarrow$ repère (0;0)
 $f(3) = \frac{2 \cdot 3^3}{(3-1)^2} = \frac{54}{4} \Rightarrow \min(3; 13.5)$

Rappels: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
 $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
 $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
donc $x^2 \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2 \cdot \sqrt{x}$

(P2) $f(x) = 2x^2 - x^2 \sqrt{x} = x^2(2 - \sqrt{x})$

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ou $2-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 2=\sqrt{x} \quad ||^2$
 $4=x$ donc les zéros sont $x=0$ et $x=4$.

b) Aire = $\int_0^4 2x^2 - x^{\frac{5}{2}} dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} \right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{4^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right] - (0) = \frac{2}{3} \cdot 64 - 128 \cdot \frac{2}{7} = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128 \cdot 7 - 256 \cdot 3}{21} = \frac{896 - 768}{21} = \frac{128}{21} \approx 6,095$

(B) $g(x) = \frac{2}{\sqrt{8-x}}$ et $h(x) = \frac{1}{3}(x-1)$

c) on nous donne $a_1=4$, vérifions-a: $g(4) = \frac{2}{\sqrt{8-4}} = \frac{2}{2} = 1$ et $h(4) = \frac{1}{3}(4-1) = 1 \Rightarrow a_2=1$ (donc A(4;1)).
puis $b_1=7$: $g(7) = \frac{2}{\sqrt{8-7}} = 2$ et $h(7) = \frac{1}{3}(7-1) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow b_2=2$ (donc B(7;2)).

d) $V = \pi \int_4^7 (h(x))^2 - (g(x))^2 dx = \pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{8-x}} \right)^2 \right) dx = \pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{27}(x-1)^3 - 4 \ln|8-x| \right]_4^7$
 $= \pi \left[\left(\frac{6^3}{27} + 4 \ln(1) \right) - \left(\frac{3^3}{27} + 4 \ln(4) \right) \right] = \pi [8 + 0 - 1 - 4 \ln 4] = \pi (7 - 4 \ln 4) \approx 4,57$

Rappels $\int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$ si $n \neq -1$ et $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$

P3) $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = e^{-x}$

a) Intersection f et g : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{2x} = e^{-x} \mid \cdot e^x$
 $e^{2x} \cdot e^x = e^{-x} \cdot e^x$
 $e^{3x} = e^0 (=1)$
 $3x = 0$ donc $x = 0$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

la deuxième coordonnée: $f(0) = e^{2 \cdot 0} = e^0 = 1$ (ou $g(0) = e^{-0} = e^0 = 1$) $\Rightarrow P(0; 1)$

La dérivée donne la pente de la tangente.

$f'(x) = (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$ donc $f'(0) = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2 = m_1$

$g'(x) = (e^{-x})' = (-x)' e^{-x} = -e^{-x}$ donc $g'(0) = -e^{-0} = -e^0 = -1 = m_2$

Rappel: angle ϕ entre 2 droites de pentes m_1 et m_2 : $\tan(\phi) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\tan(\phi) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2 - (-1)}{1 + 2 \cdot (-1)} = \frac{3}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \phi = \arctan(-3) = -71,56^\circ \Rightarrow$ l'angle est de $71,56^\circ$.

b) $m_1 = f'(x)$ et $m_2 = g'(x)$ et on veut $m_1 m_2 = -1$ donc $f'(x) \cdot g'(x) = -1 : (2e^{2x}) \cdot (-e^{-x}) = -1$
 $-2e^{2x-x} = -1 \mid : (-2)$ donc $e^x = \frac{1}{2} \mid \ln()$ donne $\ln(e^x) = \ln(\frac{1}{2})$ donc $x = \ln(\frac{1}{2}) \approx -0,69$

pour obtenir les deuxièmes coordonnées, il suffit d'évaluer dans nos fonctions:

pour B (sur $f(x)$): $f(\ln(\frac{1}{2})) = e^{2 \ln(\frac{1}{2})} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4} \Rightarrow B(\ln(\frac{1}{2}); \frac{1}{4})$

pour C (sur $g(x)$): $g(\ln(\frac{1}{2})) = e^{-\ln(\frac{1}{2})} = e^{\ln(2)} = e^{\ln(2)} = 2 \Rightarrow C(\ln(\frac{1}{2}); 2)$.

P4) La somme de la hauteur du cylindre (y) et du rayon de la demi-sphère (x) est égale à 5: $y + x = 5$ donne $y = 5 - x$ donc $x \in [0; 5]$

Volume du cylindre = aire de la base $\times$ hauteur = $\pi (rx)^2 \cdot y = \pi 4x^2 (5-x) = \pi (20x^2 - x^3)$

Volume d'une sphère de rayon x : $\frac{4}{3} \pi x^3$ donc demi-sphère = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi x^3 = \frac{2}{3} \pi x^3$

Volume du solide: $4\pi (5x^2 - x^3) + \frac{2}{3} \pi x^3 = \pi (20x^2 - 4x^3 + \frac{2}{3} x^3) = \pi (20x^2 - \frac{10}{3} x^3) = f(x)$ à maximiser

$f'(x) = \pi (40x - \frac{10}{3} \cdot 3x^2) = \pi (40x - 10x^2) = 10\pi x (4 - x)$

croissance:

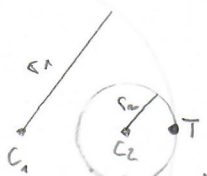
x	0	4
$10\pi x$	-	+
$4-x$	+	-
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

 le volume est donc maximal quand $x = 4 \Rightarrow y = 5 - 4 = 1$.

P5) a) $\Gamma_1: x^2 + 2x + y^2 - 2y = 73$ donc $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 73 + 1 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 75 \Rightarrow C_1(-1; 1)$ et $r_1 = \sqrt{75} = 3\sqrt{5}$

b) $C_2(2; 1)$ et $r_2 = \sqrt{10}$, alors $\vec{C_1 C_2} = (\frac{3}{1}) - (\frac{1}{1}) = (\frac{2}{0}) \Rightarrow \|\vec{C_1 C_2}\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6 = 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = r_1 - r_2$

$\vec{C_1 T} = R \vec{C_1 C_2}$ la norme de $\vec{C_1 T}$ vaut r_1 , celle de $\vec{C_1 C_2}$ vaut $r_1 - r_2$
 donc $R = \frac{r_1}{r_1 - r_2} = \frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{2}$ ainsi: $\vec{C_1 T} = \frac{3}{2} (\frac{2}{0}) = (\frac{3}{0}) = \vec{OT} - \vec{OC_1} \Rightarrow \vec{OT} = (\frac{3}{0}) + (\frac{1}{1}) = T(3; 1)$

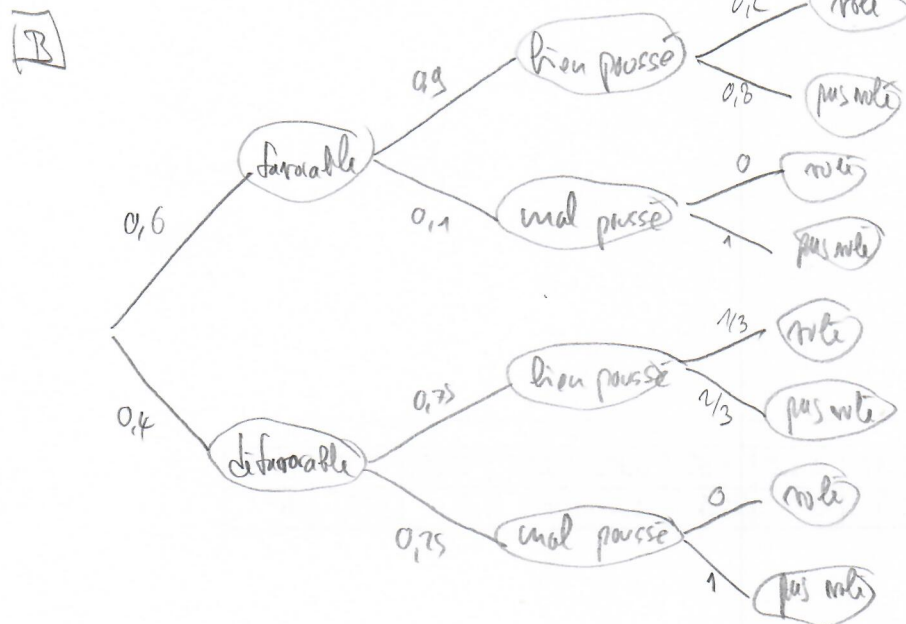


Autre méthode: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 73 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 10 - 4 = 6 \end{cases} \mid \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 68 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 17 = y \\ x^2 + (3x - 17)^2 - 4x + 2(3x - 17) = 6 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ x^2 + 9x^2 - 102x + 289 - 4x + 6x - 34 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ 10x^2 - 96x + 250 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ x^2 - 10x + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ (x-5)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot 5 - 17 = -8 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow T(5; -8)$

(P5) c) tangente de pente m : $y - y_0 - m(x - x_0) = \pm r \sqrt{m^2 + 1}$ passe par $A(10; -7) = (x; y)$, $C_2(2; 1) = (x_0; y_0)$
 et $r = \sqrt{10}$ donc $-7 - (-1) - m(10 - 2) = \pm \sqrt{10} \sqrt{m^2 + 1}$
 $-6 - 8m = \pm \sqrt{10} \sqrt{m^2 + 1} \quad | \cdot 1^2$
 $36 + 96m + 64m^2 = 10(m^2 + 1) \quad | -10m^2 - 10$
 $54m^2 + 96m + 26 = 0 \quad | :2$
 $27m^2 + 48m + 13 = 0 \quad \Delta = (48)^2 - 4(27)(13) = 900 = 30^2$
 $m_{1,2} = \frac{-48 \pm 30}{54} = \frac{-24 \pm 15}{27} = \begin{cases} -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow t_1: y = -\frac{1}{3}x + h_1 \\ -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3} \Rightarrow t_2: y = -\frac{1}{3}x + h_2 \end{cases}$
 passe $A(10; -7): -7 = -\frac{1}{3} \cdot 10 + h_1 \Rightarrow h_1 = -\frac{-7 \cdot 3 + 10}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow t_1: y = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$
 passe $A(10; -7): -7 = -\frac{1}{3} \cdot 10 + h_2 \Rightarrow h_2 = -\frac{-7 \cdot 3 + 10}{3} = -\frac{11}{3} \Rightarrow t_2: y = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$

d) $r_2 = \sqrt{10}$ $r_3 = \sqrt{10}$
 $P(-1; -2)$
 C_2 C_3
 $\vec{C_2P} = \vec{PC_3}$ donc $\vec{OP} - \vec{OC_2} = \vec{OC_3} - \vec{OP} \Rightarrow \vec{OC_3} = 2\vec{OP} - \vec{OC_2} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow C_3(-4; -5) \Rightarrow \Gamma_3: (x+4)^2 + (y+5)^2 = 10$

(P6) A a) $C_3^{10} = 120$ b) anagrammes $3C + 2R + 1R = \overline{P}_6(3; 2) = \frac{6!}{3!2!} = 60$
 cacoch "Rouges"



c) $p(\text{mal poussé}) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,06 + 0,1 = 0,16 = 16\% \checkmark$

d) $p(\text{oui}) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$

e) $p(\text{défavorable} | \text{mal poussé}) = \frac{p(\text{défavorable et mal poussé})}{p(\text{mal poussé})} = \frac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$

f) $p(\text{rien poussé}) = 1 - p(\text{mal poussé}) = 1 - 0,16 = 0,84$

$p(\text{au moins 3x fois bien poussé}) = p(3x \text{ bien poussé}) + p(4x \text{ bien poussé}) =$
 $= C_3^{10} 0,84^3 \cdot 0,16^1 + C_4^{10} 0,84^4 \cdot 0,16^1 = 50,8\%$