Solution 1. (18 points)
La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et f s'annule si $2\,x^3 = 0$, donc en $x = 0$.
Le signe de f est le suivant

x		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\,x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

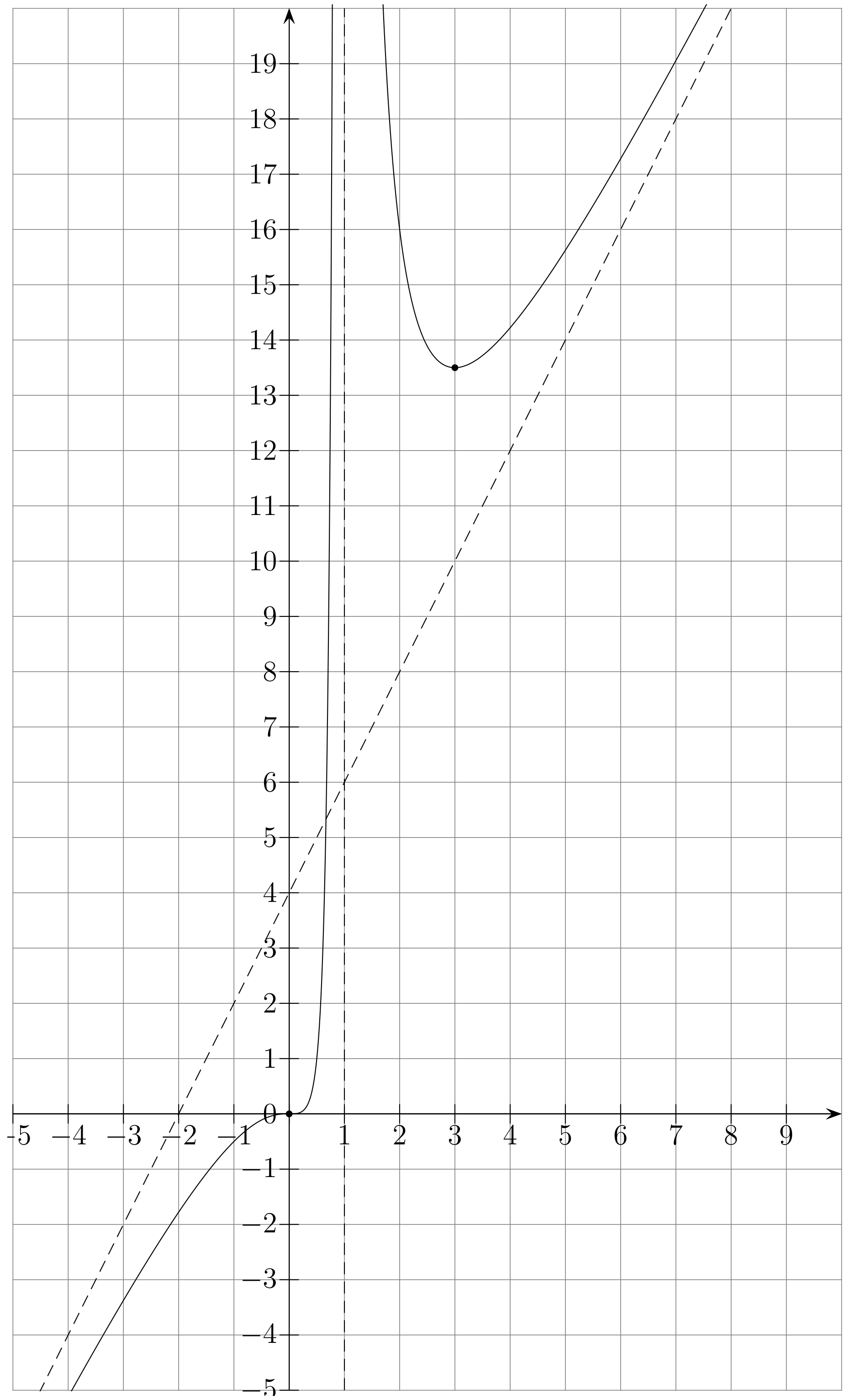
$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $\mathrm{P}(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13,5$, c'est le point $\mathrm{M}(3; 13,5)$ est minimum local.



19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
-5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2 - \sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2\,x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\,\Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc A$(4;1)$ est bien un point d'intersection des graphes.
De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc B$(7;2)$ est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x}\right)\,dx = \pi\left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4\ln(|8-x|)\right)\Big|_4^7 =$$

$$= \pi\,(8 - 1 + 0 - 4\ln(4)) = \pi(7 - 4\ln(4)) \cong 4,57$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi P$(0;1)$.
On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x+1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x+1$).
Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{2-(-1)}{1-2}\right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56°$.

b) On veut que $f'(a) = -\dfrac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \dfrac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \dfrac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi \cdot (2x)^2 \cdot y + \dfrac{4}{2\cdot 3} \cdot \pi \cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5-x) + \dfrac{2\pi}{3}\,x^3$, donc $f(x) = \dfrac{\pi}{3}\,(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{10\pi}{3}\,(12x - 3x^2) = \dfrac{10\pi}{3}\,3x(4-x)$.

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0; +\infty[$).

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 5. (18 points)

a) On a $(\Gamma_1) : (x+4)^2 + (y-1)^2 = 90$, donc $\mathrm{C}_1(-4; 1)$ et $r_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

b) Comme $\mathrm{C}_2(2; -1)$ et $r_2 = \sqrt{10}$, on a

$$||\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}|| = \left|\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = |r_1 - r_2|$$

donc les cercles sont tangents intérieurement.

Pour déterminer le point T d'intersection, on utilise

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_2} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{T}(5; -2)$. Finalement $(t) : 3x - y = 17$.

c) On pose $(t_i) : y = mx + h$.

Alors $h = -7 - 10m$ et $\sqrt{10} = \dfrac{|2m + 1 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}}$, donc $10(m^2 + 1) = (-8m - 6)^2$ qui est encore équivalente à

$$27m^2 + 48m + 13 = 0$$

dont les solutions $m = -\dfrac{1}{3}$ et $m = -\dfrac{13}{9}$.

Les tangentes cherchées sont donc $(t_1) : y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{11}{3}$, donc $(t_1) : x + 3y + 11 = 0$ et $(t_2) : y = -\dfrac{13}{9}x + \dfrac{67}{9}$, donc $(t_1) : 13x + 9y = 67$.

d) Appelons C_3 le centre du cercle cherché. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{\sqrt{10}}{||\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{P}}||}\,\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc $(\Gamma_3) : (x+4)^2 + (y+3)^2 = 10$.

Solution 6. (15 points)

Partie A

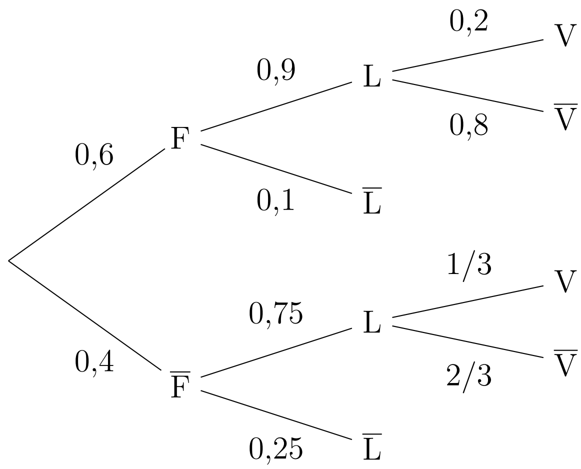
a) On a $C_3^{10} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note F l'événement "la saison a été favorable", L : "les légumes ont bien poussés" et V : "le voisin est venu chaparder".

Mettre des points pour l'arbre s'il n'y a pas de points pour les questions c) et d)... A discuter !!



c) $P\left(\overline{L}\right) = 0.6 \cdot 0.1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $P(V) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $P(\ \overline{F} \mid \overline{L}\ ) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $P(L) = 1 - 0,16 = \dfrac{21}{25}$ donc $p = C_9^{10} \left(\dfrac{21}{25}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right) + \left(\dfrac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.