MATHÉMATIQUES

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (20 points)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{2\,x-1}$.

a) Donner le signe de f.

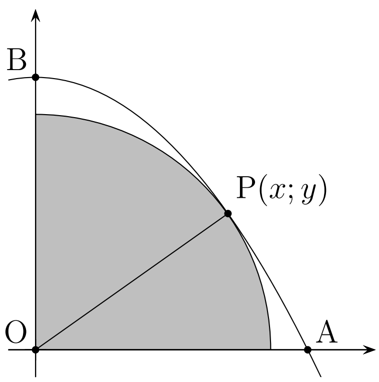
b) Écrire les équations de l'asymptote verticale, et de l'asymptote horizontale à gauche de f.

c) Étudier la croissance de f sachant que f' est telle que $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,(2\,x+1)}{(2\,x-1)^2}\,e^x$.

d) Esquisser le graphe de f.

e) Calculer la dérivée de f, et mettre $f'(x)$ sous la forme annoncée au point c).

Problème 2 (10 points)
Soit $\mathrm{P}(x\,;y)$ un point de la courbe $y = 1 - x^2$ situé entre $\mathrm{A}(1\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;1)$.



a) Montrer que l'aire du cercle de centre $\mathrm{O}(0\,;0)$ passant par P est

$$\pi\left(x^4 - x^2 + 1\right) .$$

b) Trouver les coordonnées de P sachant que cette aire est minimale.

Problème 3 (10 points)
Soit la parabole $\Gamma : y = 5\,x - x^2$ et la droite $d : x - y = 0$.

a) Représenter la région $\mathcal{R}$ limitée par ces deux courbes, et préciser les coordonnées des points P et Q où d coupe Γ.

b) Calculer l'aire A de la région $\mathcal{R}$.

c) Établir que la tangente à Γ au point $\mathrm{T}(2\,;6)$ est parallèle à d.

Problème 4 (14 points)

$\boxed{\textbf{Les parties A et B sont indépendantes.}}$

$\boxed{\textbf{Partie A}}$

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \cos(2\,x)$.

a) Donner l'équation de la tangente t_{A} au graphe de f au point $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{4}\,;0\right)$.

b) Représenter la tangente t_{A} et le graphe de f pour des x compris entre 0 et π.

c) Calculer l'angle aigu que font t_{A} et l'axe des y.

Partie B

Soit la région limitée par les courbes

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,; \quad y = 0\,; \quad x = 1\,; \quad x = b \quad (b > 1)\,.$$

a) Calculer le volume $\mathrm{V}(b)$ du solide engendré par la rotation de cette région autour de l'axe des x.

b) Trouver b sachant que $\mathrm{V}(b) = 2\,\pi$.

Problème 5 (18 points)
Soit le point $\mathrm{C}(10\,;2)$ et la droite $t : x + 3\,y - 36 = 0$.

a) Écrire l'équation du cercle Γ de centre C qui est tangent à t. Quelles sont les coordonnées du point de contact T de t et Γ ?

Soit ensuite $\mathrm{I}(0\,;12)$ un point de t.

b) Il y a deux tangentes à Γ issues de I : la droite t dont on a l'équation et la droite u. Trouver l'équation de u.

c) Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 de t et u.

d) Former l'équation d'un cercle (autre que Γ) tangent à t et u, et de même rayon que Γ.

Problème 6 (18 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

Partie A

Dénombrer les anagrammes du mot `CAPABLANCA`.

Partie B

Le Texas Hold'em est un poker (le jeu utilisé a 52 cartes) où chaque joueur reçoit dans un premier temps 2 cartes qu'il ne doit pas montrer (ces 2 cartes fermées constituent sa main).

a) Vérifier que la probabilité que ces 2 cartes fermées forment une paire d'`AS` est égale à $\frac{1}{221}$.

On a remarqué que certains joueurs ont parfois *un tic nerveux* lorsqu'ils reçoivent une excellente main. Phil est un tel joueur : s'il reçoit une paire d'`AS` il a toujours *un tic nerveux*; s'il reçoit une paire de `ROIS`, il l'a deux fois sur trois; s'il reçoit `AS-ROI`, une fois sur deux. Dans les autres situations, il reste impassible.

b) Quelle est la probabilité que Phil ait *un tic nerveux*?

c) Phil a *un tic nerveux*. Calculer la probabilité qu'il ait reçu une paire d'`AS`.

Partie C

On joue au poker (Texas Hold'em – voir la partie B) et la donne commence. Bill reçoit deux cartes fermées.

a) Établir que la probabilité qu'il ait reçu une paire vaut $\frac{1}{17}$.

Bill prend part à sept donnes un certain soir.

b) Quelle est la probabilité qu'il ait reçu une paire exactement deux fois lors des quatre premières donnes, et aucune fois lors des trois dernières ?