9 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonction exponentielle

On recherche une fonction f, non nulle, égale à sa dérivée : $f' = f$.

9.1

1) Soit f une fonction égale à sa dérivée. Que peut-on dire de la fonction λf où $\lambda \in \mathbb{R}$?
2) Soient f et g deux fonctions telles que $f' = f$ et $g' = g$. Que peut-on dire de la fonction $f + g$?

L'exercice précédent montre que s'il existe une fonction non nulle égale à sa dérivée, alors il en existe une infinité.

C'est pourquoi, on ajoute encore une condition initiale : $f(0) = 1$.

9.2 Soit f une fonction telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1) On pose $\varphi(x) = f(x)\, f(-x)$. Calculer $\varphi'(x)$.
2) Après avoir calculé $\varphi(0)$, en déduire que $f(x)\, f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Quels sont les zéros de la fonction f ?

9.3 Le but de cet exercice est de prouver que l'ajout de la condition initiale garantit l'unicité de la fonction recherchée.

Soient f et g deux fonctions telles que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

1) On pose $\varphi(x) = f(-x)\, g(x)$. Calculer $\varphi'(x)$.
2) En déduire que $1 = f(-x)\, g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) En multipliant cette dernière égalité par $f(x)$, conclure, grâce à l'exercice 9.2, que les fonctions f et g sont égales.

L'unique fonction f satisfaisant les conditions $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ s'appelle la **fonction exponentielle** ; on la note exp.

Si l'on a démontré aisément l'unicité d'une telle fonction, son existence est bien plus difficile à établir. La fonction exponentielle est définie explicitement par la série suivante :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

Mais la preuve de la convergence uniforme de cette série, qui autorise le passage $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)'$, dépasse le cadre d'un cours gymnasial.

9.4 Démontrer les propriétés de la fonction exponentielle :

1) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ 2) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

3) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ 4) $\exp(x\,y) = \big(\exp(x)\big)^y$

Indications :

1) utiliser l'exercice 9.2
2) dériver la fonction $\varphi_y(x) = \exp(x+y)\exp(-x)$
3) utiliser les propriétés 1) et 2)
4) on se limitera au cas où $y \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence

Posons $e = \exp(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \approx 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ldots$

La propriété 4) implique $\exp(x) = \exp(1 \cdot x) = \big(\exp(1)\big)^x = e^x$.

Cette notation de la fonction exponentielle sous forme de puissance simplifie l'écriture de ses propriétés :

1) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ 2) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

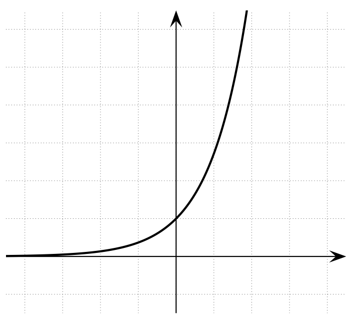
3) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ 4) $e^{x\,y} = (e^x)^y$

L'exigence de la condition initiale $\exp(0) = 1$ devient plus intuitive : $e^0 = 1$.

9.5
1) À partir de l'exercice 9.2 3) et du calcul de $\big(e^{\frac{x}{2}}\big)^2$, déduire le signe de la fonction exponentielle.
2) Étudier la croissance de la fonction exponentielle.

9.6
1) Étudier la croissance de la fonction $\varphi(x) = e^x - x - 1$.
   Rappel : $1 = e^0$ et la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que $e^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x$.
4) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x$.

Nous disposons à présent d'informations suffisantes pour tracer le graphe de la fonction exponentielle :



Fonction logarithmique

L'équation $e^x = y$ admet une unique solution pour tout $y > 0$:

– on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$;
– puisque la fonction exponentielle est dérivable, elle est continue ;
– le théorème de la valeur intermédiaire garantit l'existence d'au moins un nombre $x \in]-\infty\,;+\infty[$ tel que $e^x = y$;
– l'unicité de la solution résulte du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.

On appelle **fonction logarithme népérien** la bijection réciproque de la fonction exponentielle ; on la note ln.

Cette définition de la fonction logarithme népérien entraîne aussitôt :

1) $\ln(x)$ n'est défini que si $x > 0$
2) $e^x = y \iff x = \ln(y)$ quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$
3) $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$
4) $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Les propriétés de la fonction logarithme népérien, conséquence directe des propriétés de la fonction exponentielle énumérées à l'exercice 9.4, ont déjà été démontrées au cours d'algèbre à l'exercice 3.3 :

1) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4) $\ln(x^y) = y\,\ln(x)$

9.7

1) On a démontré l'année passée, à l'exercice 1.16, que les graphes d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

   Utiliser cette propriété pour construire le graphe de la fonction logarithme népérien à partir du graphe de la fonction exponentielle.
2) Étudier le signe de la fonction logarithme népérien à partir de son graphe.
3) D'après le graphe de la fonction logarithme népérien, que valent

   (a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$

9.8

1) Dériver chaque terme de l'égalité $x = e^{\ln(x)}$.

   En déduire la formule $\big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$.
2) Étudier la croissance de la fonction logarithme népérien.

9.9 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x+3)$
2) $f(x) = \ln(4\,x-5)$
3) $f(x) = e^{x^2}$
4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
5) $f(x) = \ln(x^2-x)$
6) $f(x) = \ln(4-x^2)$
7) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$
8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$
9) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$
10) $f(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$

9.10 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x-2)$
2) $f(x) = e^{5x}$
3) $f(x) = e^{x^2}$
4) $f(x) = \ln(3\,x^5)$
5) $f(x) = x\,\ln(x)$
6) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
7) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
8) $f(x) = x^2\,e^x$
9) $f(x) = x\,\big(\ln(x)-1\big)$
10) $f(x) = (2\,x^2-3)\,e^{3x}$
11) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x})$
12) $f(x) = \sqrt{e^x}$

9.11 Sous quel angle les courbes $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

9.12 De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Quelles sont les coordonnées du point de contact ?

9.13 Un rectangle ABCD est tel que A et B sont sur l'axe Ox alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximale.

9.14 Calculer la plus courte distance entre les courbes $y = e^x$ et $y = \ln(x)$.

Théorème de Bernouilli-L'Hospital

Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a et telles que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}\,.$$

Preuve Dans le cadre d'un cours gymnasial, on se contentera d'une version simplifiée dans laquelle on suppose $f(a) = g(a) = 0$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque Cette règle s'applique également

1) si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
2) si l'on a affaire à une limite où x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

En effet $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\big(f(\frac{1}{x})\big)'}{\big(g(\frac{1}{x})\big)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\frac{1}{x})\,(\frac{1}{x})'}{g'(\frac{1}{x})\,(\frac{1}{x})'} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\frac{1}{x})\,(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})\,(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple La limite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = \dfrac{2^2-4}{e^{2-2}-1} = \dfrac{4-4}{e^0-1} = \dfrac{0}{0}$ est indéterminée. Les méthodes utilisées pour les fonctions rationnelles et irrationnelles s'avèrent inopérantes. On peut toutefois lever cette indétermination grâce au théorème de Bernouilli-L'Hospital :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(e^{x-2}-1)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2\,x}{e^{x-2}} = \frac{2\cdot 2}{e^{2-2}} = \frac{4}{1} = 4$$

9.15 Calculer les limites suivantes, en usant, au besoin, du théorème de Bernouilli-L'Hospital pour lever les indéterminations :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,e^x}{1-e^x}$
4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(2+x)}{x+1}$
5) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$
6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln(x)}$
7) $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\ln(x)}{x^2}$
8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x-2}$
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to 0_-} x\,e^{\frac{1}{x}}$
11) $\lim\limits_{x\to 0_+} x\,e^{\frac{1}{x}}$
12) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,e^{\frac{1}{x}}$
13) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,e^{\frac{1}{x}}$
14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2+2\,x}$
15) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\,x+3}{x\,\ln(x)}$
16) $\lim\limits_{x\to 0_+} x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

9.16 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = x^2\, e^{-2x}$.
Le calcul de f'' et l'étude de la convexité ne sont pas demandés.

9.17 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

9.18 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = 2\, e^x - e^{2x}$.

9.19 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = x^2\, \ln(x)$.

9.20 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x}$.
Indication : étudier la croissance de la fonction $g(x) = e^x - x$ pour étudier le signe de f.

9.21 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$.

9.22 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = x\, \ln(x) - x$.

Réponses

9.1 1) $(\lambda\, f)' = \lambda\, f$ 2) $(f + g)' = f + g$

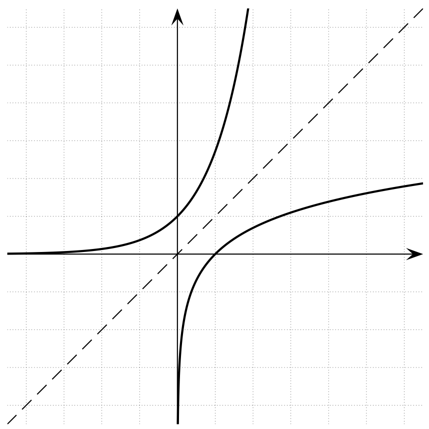
9.2 1) $\varphi'(x) = 0$ 2) $\varphi(0) = 1$ 3) f ne s'annule jamais

9.3 1) $\varphi'(x) = 0$ 2) $\varphi(0) = 1 = f(-x)\, g(x)$

9.5 1) $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2) la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

9.6 1) $\begin{array}{c|ccc} \varphi' & - & 0 & + \\ \varphi & \searrow & \text{min} & \nearrow \end{array}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

9.7 1)



2) $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$
$\ln(x) = 0$ si $x = 1$
$\ln(x) > 0$ si $x > 1$

3) (a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$
(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

9.8 2) La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

9.9

1) $\mathrm{D}_f =]-3\,;+\infty\,[$
2) $\mathrm{D}_f =]\,\frac{5}{4}\,;+\infty\,[$
3) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
4) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$
5) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;0\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$
6) $\mathrm{D}_f =]-2\,;2\,[$
7) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1\,]\,\cup\,[\,0\,;+\infty[$
8) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;0\,[\cup]\,0\,;1\,[$
9) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$
10) $\mathrm{D}_f =]\,1\,;+\infty\,[$

9.10

1) $f'(x) = \dfrac{1}{x-2}$
2) $f'(x) = 5\,e^{5x}$
3) $f'(x) = 2\,x\,e^{x^2}$
4) $f'(x) = \dfrac{5}{x}$
5) $f'(x) = \ln(x) + 1$
6) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$
7) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)\,(x-1)}$
8) $f'(x) = x\,(x+2)\,e^{x}$
9) $f'(x) = \ln(x)$
10) $f'(x) = e^{3x}\,(6\,x^2 + 4\,x - 9)$
11) $f'(x) = \dfrac{1}{3\,x}$
12) $f'(x) = \frac{1}{2}\,\sqrt{e^x}$

9.11 40,395°

9.12 $(e\,;1)$

9.13 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ $(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{e}}{e})$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{e}}{e})$

9.14 $\sqrt{2}$

9.15

1) 1	2) e^2	3) -1	4) 1
5) $\dfrac{1}{e}$	6) 1	7) $-\infty$	8) 4
9) 2	10) 0	11) $+\infty$	12) $+\infty$
13) $-\infty$	14) $\frac{1}{2}$	15) 0	16) 0

9.16 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

f n'est ni paire ni impaire

$+ \quad 0 \quad + \quad \longrightarrow f$

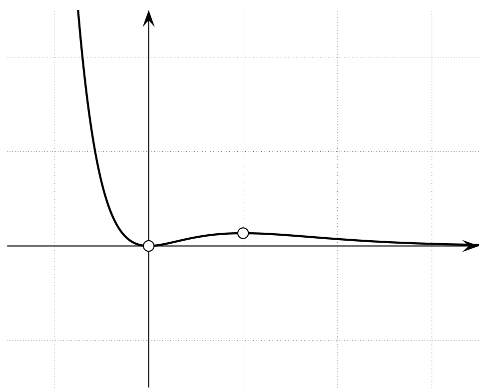
$y = 0$ asymptote horizontale à droite

$f'(x) = 2\,x\,(1-x)\,e^{-2x}$

$- \quad 0 \quad + \quad 1 \quad - \quad \longrightarrow f'$

$(0\,;0)$ minimum

$(1\,;\frac{1}{e^2})$ maximum



9.17 $\mathrm{D}_f =]\,0\,;+\infty\,[$

f n'est ni paire ni impaire

0		1		
	$-$		$+$	f

$x = 0$ asymptote verticale

$y = 0$ asymptote horizontale à droite

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

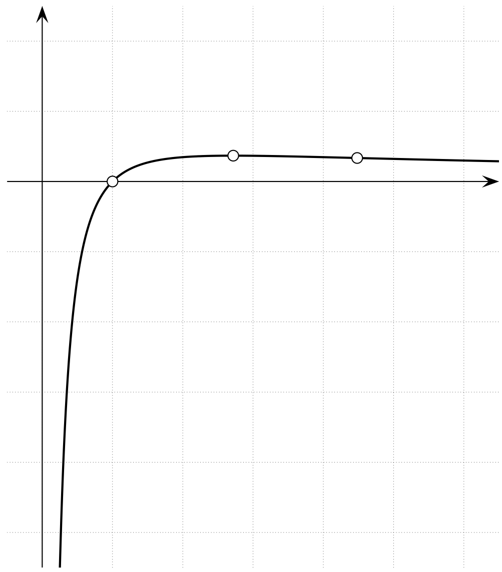
0		e		
	$+$		$-$	f'

$(e\,;\frac{1}{e})$ maximum

$$f''(x) = \frac{2\,\ln(x) - 3}{x^3}$$

0		$\sqrt{e^3}$		
	$-$		$+$	f''

$(\sqrt{e^3}\,;\frac{3}{2\sqrt{e^3}})$ point d'inflexion



9.18 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

f n'est ni paire ni impaire

$f(x) = e^x\,(2 - e^x)$

	$\ln(2)$		
$+$		$-$	f

$y = 0$ asymptote horizontale à gauche

$f'(x) = 2\,e^x\,(1 - e^x)$

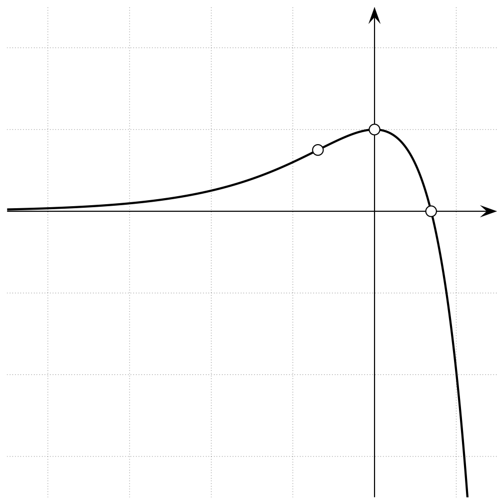
	0		
$+$		$-$	f'

$(0\,;1)$ maximum

$f''(x) = 2\,e^x\,(1 - 2\,e^x)$

	$-\ln(2)$		
$+$		$-$	f''

$(-\ln(2)\,;\frac{3}{4})$ point d'inflexion



9.19 $\mathrm{D}_f =]\,0\,;+\infty\,[$

f n'est ni paire ni impaire

0		1		
	$-$		$+$	f

$(0\,;0)$ point limite

$f'(x) = x\,\big(2\,\ln(x) + 1\big)$

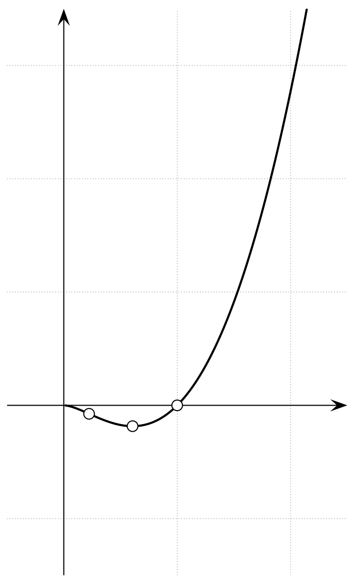
0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		
	$-$		$+$	f'

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\,;-\frac{1}{2\,e}\right)$ minimum

$f''(x) = 2\,\ln(x) + 3$

0		$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$		
	$-$		$+$	f''

$\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\,;-\frac{3}{2\,e^3}\right)$ point d'inflexion



9.20 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

f n'est ni paire ni impaire

$\xrightarrow{\qquad\qquad + \qquad\qquad} f$

$y = 1$ asymptote horizontale à droite

$f'(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

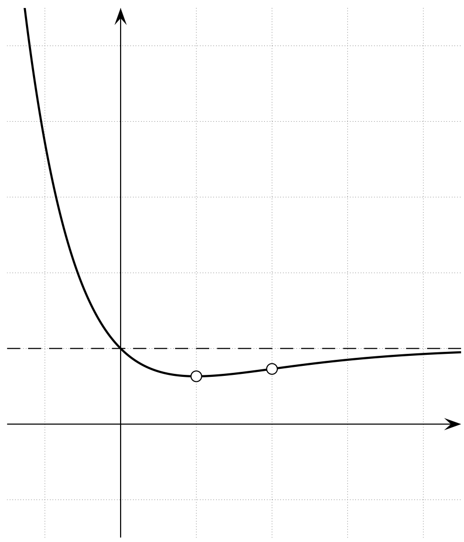
$\quad - \quad \overset{1}{|} \quad + \quad \longrightarrow f'$

$(1\,;\frac{e-1}{e})$ minimum

$f''(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$

$\quad + \quad \overset{2}{|} \quad - \quad \longrightarrow f''$

$(2\,;\frac{e^2-2}{e^2})$ point d'inflexion



9.21 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

f n'est ni paire ni impaire

$\quad - \quad \overset{0}{|} \quad + \quad \longrightarrow f$

$y = -\frac{1}{2}$ asymptote horizontale à gauche

$y = 1$ asymptote horizontale à droite

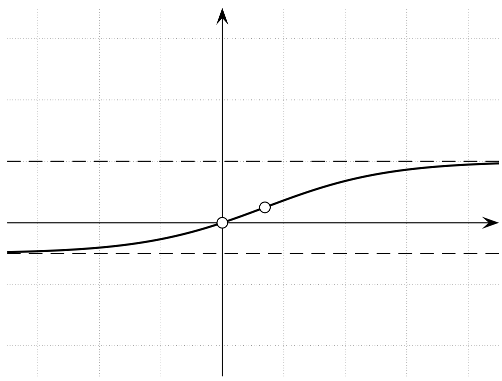
$f'(x) = \dfrac{3\,e^x}{(e^x+2)^2}$

$\xrightarrow{\qquad\qquad + \qquad\qquad} f'$

$f''(x) = \dfrac{3\,e^x\,(2-e^x)}{(e^x+2)^3}$

$\quad + \quad \overset{\ln(2)}{|} \quad - \quad \longrightarrow f''$

$(\ln(2)\,;\frac{1}{4})$ point d'inflexion



9.22 $\mathrm{D}_f =]\,0\,;+\infty\,[$

f n'est ni paire ni impaire

$\overset{0}{]} \quad - \quad \overset{e}{|} \quad + \quad \longrightarrow f$

$(0\,;0)$ point limite

$f'(x) = \ln(x)$

$\overset{0}{]} \quad - \quad \overset{1}{|} \quad + \quad \longrightarrow f'$

$(1\,;-1)$ minimum

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$\overset{0}{]} \xrightarrow{\qquad\qquad + \qquad\qquad} f''$