Fonctions exponentielles et logarithmiques

Résumé du chapitre 9 – 3M

1 Fonction exponentielle

Définition

La **fonction exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction f vérifiant

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Elle est définie explicitement par la série

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

Pourquoi la condition initiale ? Si $f' = f$, alors $(\lambda f)' = \lambda f$ et, si $g' = g$, $(f+g)' = f + g$: il existe une infinité de fonctions égales à leur dérivée. La condition $f(0) = 1$ garantit l'unicité.

Idée de l'unicité. Pour $f' = f$ et $f(0) = 1$, on pose $\varphi(x) = f(x)f(-x)$. Alors $\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$, donc φ est constante, égale à $\varphi(0) = 1$:

$$f(x)\, f(-x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et en particulier f ne s'annule jamais. Si g vérifie les mêmes conditions, $\psi(x) = f(-x)g(x)$ a aussi une dérivée nulle, d'où $f(-x)g(x) = 1$, puis $g = f$.

Propriétés algébriques

On pose $e = \exp(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\ldots$ et l'on écrit $\exp(x) = e^x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1)\ e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad 2)\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad 3)\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad 4)\ e^{xy} = (e^x)^y$$

et $e^0 = 1$.

Signe et croissance

- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $e^x = \left(e^{x/2}\right)^2$ et $e^x \neq 0$).
- $(e^x)' = e^x > 0$: la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(e^x)'' = e^x > 0$: elle est convexe sur $\mathbb{R}$. (seulement en MR)
- $e^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (étude de $\varphi(x) = e^x - x - 1$, minimum $\varphi(0) = 0$).

Limites

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \implies y = 0 \text{ est asymptote horizontale en } -\infty.$$

2 Fonction logarithme népérien

L'équation $e^x = y$ admet une unique solution pour tout $y > 0$ (limites en $\pm\infty$, continuité, théorème de la valeur intermédiaire, stricte croissance). Ainsi exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Définition

La **fonction logarithme népérien**, notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle :

$$e^x = y \iff x = \ln(y) \qquad (x \in \mathbb{R},\ y > 0).$$

Conséquences

1) $\ln(x)$ n'est défini que si $x > 0$;
2) $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$;
3) $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés algébriques

Pour $x, y > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln(x^y) = y\ln(x).$$

Dérivée. En dérivant $x = e^{\ln(x)}$: $1 = e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = x\,(\ln(x))'$, donc

$$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}} \qquad (x > 0).$$

Comme $\frac{1}{x} > 0$, ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; de plus $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$: ln est concave (seulement en MR).

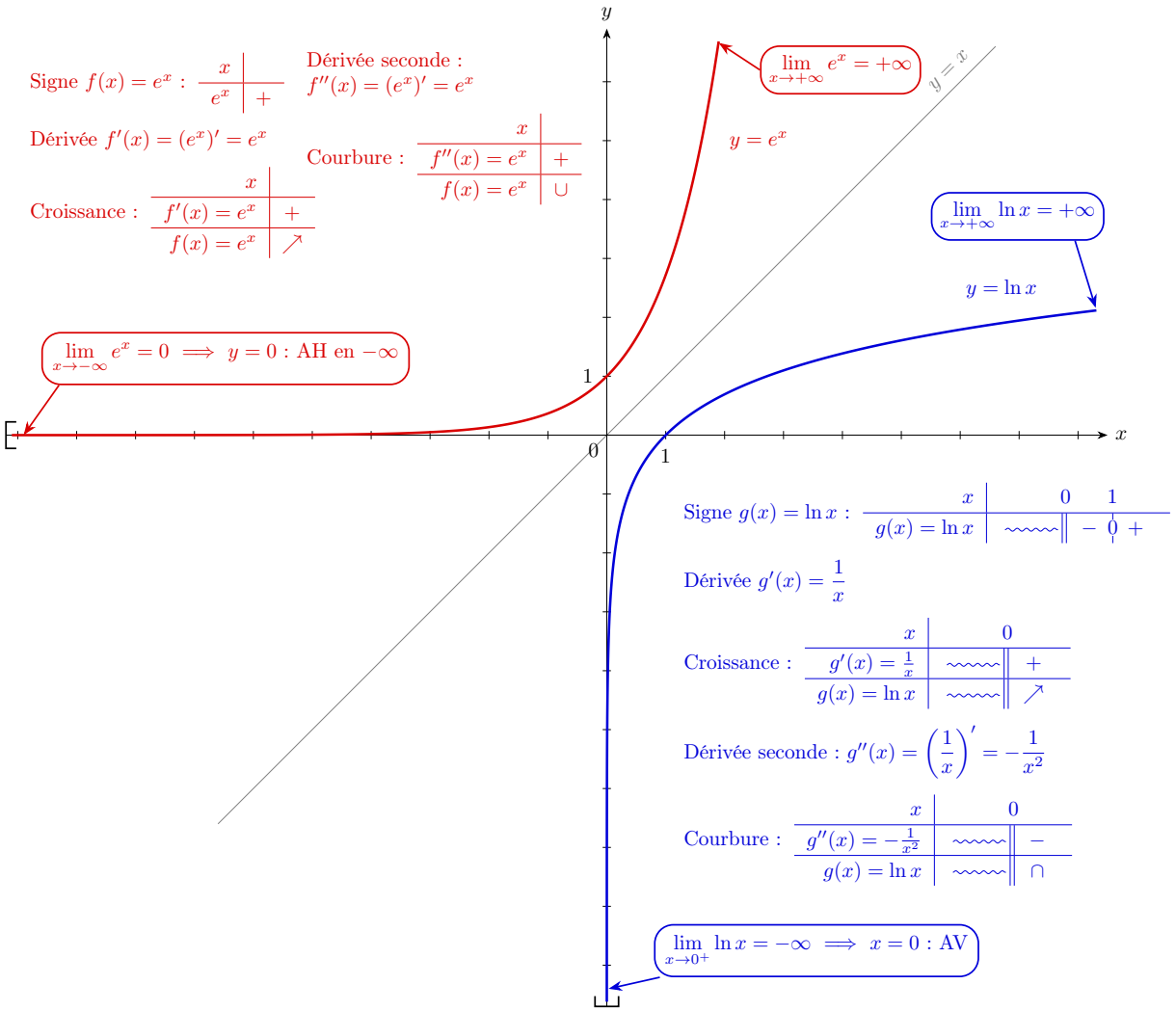
Signe et limites

$$\ln(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 1, \qquad \ln(1) = 0, \qquad \ln(x) > 0 \text{ si } x > 1,$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \implies x = 0 \text{ est asymptote verticale}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

3 Graphes

Les graphes de exp et de ln sont symétriques par rapport à la bissectrice $y = x$ du premier quadrant (fonctions réciproques l'une de l'autre) (dérivées secondes et courbures seulement en MR).



Récapitulatif : exponentielle et logarithme

	$f(x) = e^x$	$g(x) = \ln(x)$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$
Image	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
Signe	$+$	$-$ sur $]0;1[$, 0 en 1, $+$ sur $]1;+\infty[$
Dérivée	e^x	$\frac{1}{x}$
Croissance	strictement croissante	strictement croissante
Dérivée seconde (MR)	e^x	$-\frac{1}{x^2}$
Courbure (MR)	convexe ($\cup$)	concave ($\cap$)
Asymptote	$y = 0$ en $-\infty$ (AH)	$x = 0$ (AV)
Limite en $-\infty$	0	n'existe pas (ln non défini)
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

4 Ensemble de définition et dérivation

Ensemble de définition. On retient :

— $\ln(u(x))$ est défini si $u(x) > 0$;
— $e^{u(x)}$ est défini là où $u(x)$ l'est.

Exemples : $\ln(4x-5) : x > \frac{5}{4}$; $\ln(x^2-x) : x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$; $\ln(\ln(x)) : x > 1$.

Dérivées

$$(e^u)' = u'\,e^u, \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \qquad (e^{ax})' = a\,e^{ax}.$$

Exemples : $(e^{x^2})' = 2x\,e^{x^2}$; $(x\ln(x))' = \ln(x)+1$; $(x^2e^x)' = x(x+2)e^x$; $\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$.

5 Théorème de Bernoulli–L'Hospital

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a et telles que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Remarques

— La règle s'applique aussi si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.
— Elle s'applique aussi lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.
— Elle ne sert qu'en cas d'indétermination ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$).

Exemple.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} \ \left(\tfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{e^{x-2}} = \frac{4}{1} = 4.$$

Limites usuelles (obtenues avec ce théorème) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1.$$

6 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f (exponentielle ou logarithmique), on détermine dans l'ordre :

1. l'ensemble de définition D_f ;
2. la parité (ni paire ni impaire pour la plupart des exemples du chapitre) ;
3. le signe de f et les zéros ;
4. les limites aux bornes de D_f et les asymptotes (horizontales, obliques, verticales) ;
5. la dérivée f', son signe, la croissance, les extremums ;
6. la dérivée seconde f'', son signe, la courbure, les points d'inflexion (seulement en MR) ;
7. le graphe.