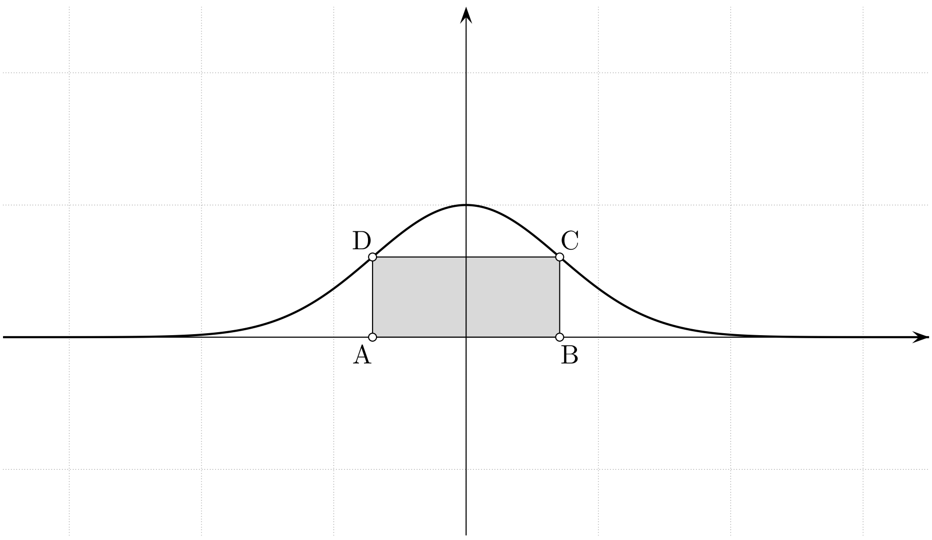
9.13



Posons $f(x) = e^{-x^2}$.
La fonction f est paire, car $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$.

Puisque l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de la fonction f, les coordonnées des sommets du rectangle s'écrivent :
$\mathrm{A}(-x\,;0)$, $\mathrm{B}(x\,;0)$, $\mathrm{C}(x\,;e^{-x^2})$ et $\mathrm{D}(-x\,;e^{-x^2})$.

L'aire du rectangle ABCD s'exprime au moyen de cette fonction :
$\mathcal{A}(x) = 2\,x\,e^{-x^2}$ où $x \in [0\,;+\infty[$

Étudions la croissance de la fonction $\mathcal{A}$, afin d'en déterminer le maximum.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(x) &= \left(2\,x\,e^{-x^2}\right)' \\
&= (2\,x)'\,e^{-x^2} + 2\,x\,(e^{-x^2})' \\
&= 2\,e^{-x^2} + 2\,x\,e^{-x^2}\,(-x^2)' \\
&= 2\,e^{-x^2} + 2\,x\,e^{-x^2}\,(-2\,x) \\
&= 2\,e^{-x^2} - 4\,x^2\,e^{-x^2} \\
&= 2\,e^{-x^2}\,(1 - 2\,x^2) \\
&= 2\,e^{-x^2}\,(1 + \sqrt{2}\,x)\,(1 - \sqrt{2}\,x)
\end{aligned}$$

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2\,e^{-x^2}$	$+$		$+$		$+$
$1 + \sqrt{2}\,x$	$-$	0	$+$		$+$
$1 - \sqrt{2}\,x$	$+$		$+$	0	$-$
$\mathcal{A}'$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\mathcal{A}$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

L'aire du rectangle ABCD est ainsi maximale si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On calcule $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$

D'où $\mathrm{A}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ $\mathrm{B}(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0)$ $\mathrm{C}(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{e}}{e})$ $\mathrm{D}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{e}}{e})$