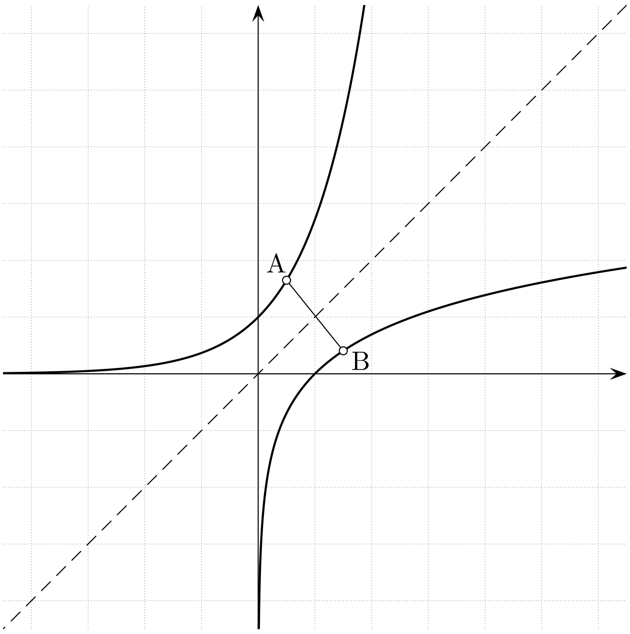
9.14



Soit $A(x\,;e^x)$ un point situé sur la courbe $y = e^x$.

Étant donné que les courbes $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant, le point B de la courbe $y = \ln(x)$ le plus proche du point A a pour coordonnées $B(e^x\,;x)$.

En d'autres termes, le point B est le symétrique du point A par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

La distance entre les points A et B vaut :

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} e^x - x \\ x - e^x \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(e^x - x)^2 + (x - e^x)^2} \\ &= \sqrt{(e^x - x)^2 + \big((-1)\,(e^x - x)\big)^2} = \sqrt{(e^x - x)^2 + (e^x - x)^2} = \sqrt{2\,(e^x - x)^2} \\ &= \sqrt{2}\,|e^x - x|\end{aligned}$$

Mais, l'exercice 9.6 2) a prouvé que $e^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > x$ ou encore $e^x - x > 0$.

Par conséquent, $\delta(x) = \sqrt{2}\,|e^x - x| = \sqrt{2}\,(e^x - x)$.

Étudions la croissance de la fonction δ, pour en déterminer le minimum.

$$\begin{aligned}\delta'(x) &= \big(\sqrt{2}\,(e^x - x)\big)' \\ &= \sqrt{2}\,(e^x - x)' \\ &= \sqrt{2}\,(e^x - 1)\end{aligned}$$

Il s'agit d'étudier le signe de $e^x - 1$ pour étudier la croissance de δ .

Mais on sait que $e^0 = 1$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cela implique :

$$\begin{cases} e^x < 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x = 1 & \text{si } x = 0 \\ e^x > 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \iff \begin{array}{ll} e^x - 1 < 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 = 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - 1 > 0 & \text{si } x > 0 \end{array}$$

Nous disposons à présent des informations nécessaires pour obtenir la croissance de la fonction δ .

$$\begin{array}{c|ccc} \delta' & - & 0 & + \\ \delta & \searrow & \text{min} & \nearrow \end{array}$$

On conclut finalement que la plus courte distance entre les courbes $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ vaut : $\delta(0) = \sqrt{2}\,(e^0 - 0) = \sqrt{2}\,(1 - 0) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.