9.16

1) Puisque toute fonction polynomiale et que la fonction exponentielle sont définies sur l'ensemble des nombres réels, on conclut que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(1) = 1^2 \cdot e^{-2\cdot 1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}135$
$f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-2\cdot(-1)} = e^2 \approx 7{,}389$

Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
Puisque $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

3)

		0	
e^{-2x}	$+$	|	$+$
x^2	$+$	0	$+$
f	$+$	0	$+$

4) Vu que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\,e^{-2x} = (-\infty)^2\,e^{-2(-\infty)} = (+\infty)\,e^{+\infty} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\,e^{-2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\,e^{-2x} = (-\infty)\,e^{-2(-\infty)} = (-\infty)\,e^{+\infty}$$

$$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Ainsi, il n'y a pas d'asymptote oblique à gauche.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\,e^{-2x} = (+\infty)^2\,e^{-2(+\infty)} = (+\infty)\,e^{-\infty} = (+\infty)\cdot(0_+) \text{ : indéterminé}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2\,e^{-2x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x}{e^{2x}\,(2\,x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x}{2\,e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{e^{2(+\infty)}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ : indéterminé}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2\,e^{-2x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}\,(2\,x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\,e^{2x}} = \frac{1}{2\,e^{2(+\infty)}}\\ &= \frac{1}{2\,e^{+\infty}} = \frac{1}{2\cdot(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Ce calcul montre que $y = 0$ est une asymptote horizontale à droite.

5) $$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2\,e^{-2x})'\\ &= (x^2)'\,e^{-2x} + x^2\,(e^{-2x})'\\ &= 2\,x\,e^{-2x} + x^2\,e^{-2x}\,(-2\,x)'\\ &= 2\,x\,e^{-2x} - 2\,x^2\,e^{-2x}\\ &= 2\,x\,e^{-2x}\,(1-x)\\ &= 2\,x\,(1-x)\,e^{-2x}\end{aligned}$$

		0		1	
$2\,x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
e^{-2x}	$+$		$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = 0^2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$
Le point $(0\,;0)$ est un minimum global.

$f(1) = 1^2 \cdot e^{-2 \cdot 1} = 1 \cdot e^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$
Le point $(1\,;\frac{1}{e^2})$ est un maximum local.

6)