9.17

1) $\ln(x)$ n'est défini que si $x > 0$.
En outre, le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x \neq 0$.
C'est pourquoi, on conclut $\mathrm{D}_f =]0\,;+\infty[$.

2) Vu que D_f n'est pas symétrique, la fonction ne saurait être paire ou impaire.

3)

	0		1	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$
x	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$
f	$\Vert$	$-$	0	$+$

4) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(0_+)}{0_+} = \frac{-\infty}{0_+} = -\infty$

La fonction f admet $x = 0$ comme asymptote verticale.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ : indéterminé}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0_+$$

La fonction f admet $y = 0$ comme asymptote horizontale à droite.

5)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \\ &= \frac{\big(\ln(x)\big)'\,x - \ln(x)\,(x)'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur :

(a) $1 - \ln(x) = 0$
$1 = \ln(x)$
$e^1 = e^{\ln(x)}$
$e = x$

(b) $$\begin{cases} \ln(x) < 1 & \text{si } x < e \\ \ln(x) = 1 & \text{si } x = e \\ \ln(x) > 1 & \text{si } x > e \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < 1-\ln(x) & \text{si } x < e \\ 0 = 1-\ln(x) & \text{si } x = e \\ 0 > 1-\ln(x) & \text{si } x > e \end{cases}$$

	0		e	
$1-\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$
x^2	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$
f	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$

Le point $(e\,;\frac{1}{e})$ est un maximum global.

6) $$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)' \\ &= \frac{\big(1-\ln(x)\big)'\,x^2 - \big(1-\ln(x)\big)\,(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\big(0-\frac{1}{x}\big)\,x^2 - \big(1-\ln(x)\big)\cdot 2\,x}{x^4} \\ &= \frac{-x-2\,x+2\,x\,\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{2\,x\,\ln(x)-3\,x}{x^4} \\ &= \frac{x\,\big(2\,\ln(x)-3\big)}{x^4} \\ &= \frac{2\,\ln(x)-3}{x^3} \end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur :

(a) $2\,\ln(x)-3=0$
$2\,\ln(x)=3$
$\ln(x)=\frac{3}{2}$
$e^{\ln(x)}=e^{\frac{3}{2}}$
$x=\sqrt{e^3}$

(b) $$\begin{cases} \ln(x)<\frac{3}{2} & \text{si } x<\sqrt{e^3} \\ \ln(x)=\frac{3}{2} & \text{si } x=\sqrt{e^3} \\ \ln(x)>\frac{3}{2} & \text{si } x>\sqrt{e^3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,\ln(x)<3 & \text{si } x<\sqrt{e^3} \\ 2\,\ln(x)=3 & \text{si } x=\sqrt{e^3} \\ 2\,\ln(x)>3 & \text{si } x>\sqrt{e^3} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2\,\ln(x)-3<0 & \text{si } x<\sqrt{e^3} \\ 2\,\ln(x)-3=0 & \text{si } x=\sqrt{e^3} \\ 2\,\ln(x)-3>0 & \text{si } x>\sqrt{e^3} \end{cases}$$

	0		$\sqrt{e^3}$	
$2\,\ln(x)-3$	‖	$-$	0	$+$
x^3	‖	$+$		$+$
f''	‖	$-$	0	$+$
f	‖	$\frown$	infl	$\smile$

$$f(\sqrt{e^3}) = \frac{\ln(\sqrt{e^3})}{\sqrt{e^3}} = \frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{e^3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{e^3}} = \frac{3}{2\,\sqrt{e^3}}$$

Le point $(\sqrt{e^3}\,;\frac{3}{2\,\sqrt{e^3}})$ est un point d'inflexion.

7)