9.18 1) Vu que toute fonction polynomiale est définie sur $\mathbb{R}$ et que l'exponentielle est définie sur l'ensemble des nombres réels, on conclut que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(1) = 2\,e^1 - e^{2\cdot 1} = 2\,e - e^2 \approx -1{,}952$
$f(-1) = 2\,e^{-1} - e^{2\cdot(-1)} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}6$

Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
Puisque $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

3) $f(x) = 2\,e^x - e^{2x} = 2\,e^x - (e^x)^2 = e^x\,(2 - e^x)$
On rappelle que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) $2 - e^x = 0$
$2 = e^x$
$\ln(2) = \ln(e^x)$
$\ln(2) = x$

(b) $\begin{cases} e^x < 2 & \text{si } x < \ln(2) \\ e^x = 2 & \text{si } x = \ln(2) \\ e^x > 2 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} -e^x > -2 & \text{si } x < \ln(2) \\ -e^x = -2 & \text{si } x = \ln(2) \\ -e^x < -2 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2 - e^x > 0 & \text{si } x < \ln(2) \\ 2 - e^x = 0 & \text{si } x = \ln(2) \\ 2 - e^x < 0 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$

		$\ln(2)$	
e^x	$+$		$+$
$2 - e^x$	$+$	0	$-$
f	$+$	0	$-$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x\,(2 - e^x) = e^{-\infty}\,(2 - e^{-\infty}) = 0\,(2 - 0) = 0$
La fonction f admet ainsi $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\,(2 - e^x) = e^{+\infty}\,(2 - e^{+\infty}) = (+\infty)\,\big(2 - (+\infty)\big)$$
$$= (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Il n'y a par conséquent pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\,(2 - e^x)}{x} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ : indéterminé}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\,(2 - e^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(e^x\,(2 - e^x)\big)'}{(x)'}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'\,(2 - e^x) + e^x\,(2 - e^x)'}{1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} e^x\,(2 - e^x) + e^x\,(-e^x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\,\big((2 - e^x) - e^x\big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\,(2-2\,e^x) = \lim_{x\to+\infty} 2\,e^x\,(1-e^x)$$

$$= 2\,e^{+\infty}\,(1-e^{+\infty}) = 2\cdot(+\infty)\,\big(1-(+\infty)\big)$$

$$= (+\infty)\,(-\infty) = -\infty$$

La fonction f ne possède donc pas d'asymptote oblique à droite.

5) $$\begin{aligned} f'(x) &= (2\,e^x - e^{2x})' \\ &= 2\,(e^x)' - e^{2x}\,(2\,x)' \\ &= 2\,e^x - e^{2x}\cdot 2 \\ &= 2\,e^x - 2\,(e^x)^2 \\ &= 2\,e^x\,(1-e^x) \end{aligned}$$

(a) $1 - e^x = 0$
$1 = e^x$
$\ln(1) = \ln(e^x)$
$0 = x$

(b) $$\begin{cases} e^x < 1 & \text{si } x<0 \\ e^x = 1 & \text{si } x=0 \\ e^x > 1 & \text{si } x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} -e^x > -1 & \text{si } x<0 \\ -e^x = -1 & \text{si } x=0 \\ -e^x < -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-e^x > 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^x = 0 & \text{si } x=0 \\ 1-e^x < 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

		0	
$2\,e^x$	$+$		$+$
$1-e^x$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = 2\,e^0 - e^{2\cdot 0} = 2\cdot 1 - 1 = 1$
Le point $(0\,;1)$ est un maximum global.

6) $$\begin{aligned} f''(x) &= (2\,e^x - 2\,e^{2x})' \\ &= 2\,(e^x)' - 2\,(e^{2x})' \\ &= 2\,e^x - 2\,e^{2x}\,(2\,x)' \\ &= 2\,e^x - 2\,(e^x)^2\cdot 2 \\ &= 2\,e^x\,(1-2\,e^x) \end{aligned}$$

(a) $1 - 2\,e^x = 0$
$1 = 2\,e^x$
$\frac{1}{2} = e^x$

$\ln(\frac{1}{2}) = \ln(e^x)$
$-\ln(2) = x$

$$\text{(b)} \begin{cases} e^x < \frac{1}{2} & \text{si } x < -\ln(2) \\ e^x = \frac{1}{2} & \text{si } x = -\ln(2) \\ e^x > \frac{1}{2} & \text{si } x > -\ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} -2\,e^x > -1 & \text{si } x < -\ln(2) \\ -2\,e^x = -1 & \text{si } x = -\ln(2) \\ -2\,e^x < -1 & \text{si } x > -\ln(2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 2\,e^x > 0 & \text{si } x < -\ln(2) \\ 1 - 2\,e^x = 0 & \text{si } x = -\ln(2) \\ 1 - 2\,e^x < 0 & \text{si } x > -\ln(2) \end{cases}$$

		$-\ln(2)$	
$2\,e^x$	$+$		$+$
$1 - 2\,e^x$	$+$	0	$-$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl	$\frown$

$$f\big(-\ln(2)\big) = 2\,e^{-\ln(2)} - e^{2(-\ln(2))} = 2\,(e^{\ln(2)})^{-1} - (e^{\ln(2)})^{-2}$$
$$= 2 \cdot 2^{-1} - 2^{-2} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

Le point $\big(-\ln(2)\,;\frac{3}{4}\big)$ est un point d'inflexion.

7)