**9.19**

1) Pour que la fonction $f$ soit définie, il faut que $\ln(x)$ soit défini, ce qui est le cas si $x > 0$. Par conséquent $\mathrm{D}_f = \,]0\,;+\infty[\,$.

2) Puisque le domaine de définition n'est pas symétrique, la fonction $f$ ne saurait être paire ou impaire.

3)

| | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2$ | $\Vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ |
| $f$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ |

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\,\ln(x) = (0_+)^2\cdot\ln(0_+) = 0_+\cdot(-\infty)$ : indéterminé

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\,\ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\big(\ln(x)\big)'}{(x^{-2})'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-2\,x^{-3}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\tfrac{1}{2}\,x^2 = -\tfrac{1}{2}\cdot(0_+)^2 = 0_-$$

On conclut de ce calcul que le point $(0\,;0)$ est un point limite.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\ln(x) = (+\infty)^2\cdot\ln(+\infty) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

La fonction $f$ ne possède donc pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\,\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\,\ln(x) = (+\infty)\cdot\ln(+\infty)$$

$$= (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

La fonction $f$ ne possède ainsi pas d'asymptote oblique à droite.

5) $f'(x) = \big(x^2\,\ln(x)\big)'$

$= (x^2)'\,\ln(x) + x^2\,\big(\ln(x)\big)'$

$= 2\,x\,\ln(x) + x^2\cdot\dfrac{1}{x}$

$= 2\,x\,\ln(x) + x$

$= x\,\big(2\,\ln(x)+1\big)$

Étudions le signe de l'expression $2\,\ln(x)+1$ :

(a) $2\,\ln(x)+1 = 0$

$2\,\ln(x) = -1$

$\ln(x) = -\frac{1}{2}$

$e^{\ln(x)} = e^{-\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(b) $\begin{cases} \ln(x) < -\frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \ln(x) = -\frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \ln(x) > -\frac{1}{2} & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\ln(x) < -1 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2\ln(x) = -1 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2\ln(x) > -1 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\ln(x) + 1 < 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2\ln(x) + 1 = 0 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2\ln(x) + 1 > 0 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

| | 0 | | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $2\ln(x)+1$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x$ | ‖ | $+$ | \| | $+$ |
| $f'$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f$ | ‖ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = (\frac{1}{\sqrt{e}})^2 \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{e} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$

Le point $(\frac{1}{\sqrt{e}}\,; -\frac{1}{2e})$ est le minimum global de la fonction $f$.

6) $f''(x) = \Big(x\,\big(2\ln(x)+1\big)\Big)'$
$= (x)'\big(2\ln(x)+1\big) + x\,\big(2\ln(x)+1\big)'$
$= 1 \cdot \big(2\ln(x)+1\big) + x\,(2 \cdot \frac{1}{x})$
$= 2\ln(x) + 1 + 2$
$= 2\ln(x) + 3$

Étudions le signe de l'expression $2\ln(x)+3$ :

(a) $2\ln(x) + 3 = 0$
$2\ln(x) = -3$
$\ln(x) = -\frac{3}{2}$
$e^{\ln(x)} = e^{-\frac{3}{2}}$
$x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$

(b) $\begin{cases} \ln(x) < -\frac{3}{2} & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ \ln(x) = -\frac{3}{2} & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ \ln(x) > -\frac{3}{2} & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\ln(x) < -3 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2\ln(x) = -3 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2\ln(x) > -3 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2\ln(x) + 3 < 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2\ln(x) + 3 = 0 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2\ln(x) + 3 > 0 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{cases}$

| | 0 | | $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $2\ln(x)+3$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''$ | ‖ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f$ | ‖ | $\frown$ | infl | $\smile$ |

$f(\frac{1}{\sqrt{e^3}}) = (\frac{1}{\sqrt{e^3}})^2\ \ln(e^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{e^3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2\,e^3}$

Le point $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\,;-\frac{3}{2\,e^3})$ est un point d'inflexion.

7)