

- 9.19**
- 1) Pour que la fonction  $f$  soit définie, il faut que  $\ln(x)$  soit défini, ce qui est le cas si  $x > 0$ . Par conséquent  $D_f = ]0 ; +\infty[$ .
  - 2) Puisque le domaine de définition n'est pas symétrique, la fonction  $f$  ne saurait être paire ou impaire.

3)

$\ln(x)$	0	-	0	+
$x^2$		+		+
$f$	-	0	+	

4)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = (0_+)^2 \cdot \ln(0_+) = 0_+ \cdot (-\infty) : \text{indéterminé}$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(x))'}{(x^{-2})'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2} \cdot (0_+)^2 = 0_- \end{aligned}$$

On conclut de ce calcul que le point  $(0 ; 0)$  est un point limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x) = (+\infty)^2 \cdot \ln(+\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

La fonction  $f$  ne possède donc pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = (+\infty) \cdot \ln(+\infty) \\ &= (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

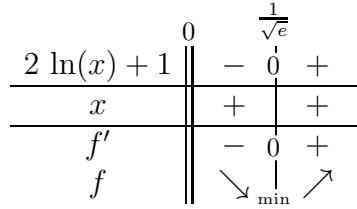
La fonction  $f$  ne possède ainsi pas d'asymptote oblique à droite.

$$\begin{aligned} 5) \quad f'(x) &= (x^2 \ln(x))' \\ &= (x^2)' \ln(x) + x^2 (\ln(x))' \\ &= 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \\ &= x(2 \ln(x) + 1) \end{aligned}$$

Étudions le signe de l'expression  $2 \ln(x) + 1$  :

$$\begin{aligned} (a) \quad 2 \ln(x) + 1 &= 0 \\ 2 \ln(x) &= -1 \\ \ln(x) &= -\frac{1}{2} \\ e^{\ln(x)} &= e^{-\frac{1}{2}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \ln(x) < -\frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \ln(x) = -\frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \ln(x) > -\frac{1}{2} & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2 \ln(x) < -1 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2 \ln(x) = -1 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2 \ln(x) > -1 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2 \ln(x) + 1 < 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2 \ln(x) + 1 = 0 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ 2 \ln(x) + 1 > 0 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Le point  $(\frac{1}{\sqrt{e}} ; -\frac{1}{2e})$  est le minimum global de la fonction  $f$ .

$$\begin{aligned}
 6) \quad & f''(x) = \left( x (2 \ln(x) + 1) \right)' \\
 &= (x)' (2 \ln(x) + 1) + x (2 \ln(x) + 1)' \\
 &= 1 \cdot (2 \ln(x) + 1) + x (2 \cdot \frac{1}{x}) \\
 &= 2 \ln(x) + 1 + 2 \\
 &= 2 \ln(x) + 3
 \end{aligned}$$

Étudions le signe de l'expression  $2 \ln(x) + 3$  :

$$(a) \quad 2 \ln(x) + 3 = 0$$

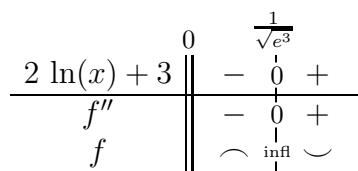
$$2 \ln(x) = -3$$

$$\ln(x) = -\frac{3}{2}$$

$$e^{\ln(x)} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \ln(x) < -\frac{3}{2} & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ \ln(x) = -\frac{3}{2} & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ \ln(x) > -\frac{3}{2} & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2 \ln(x) < -3 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2 \ln(x) = -3 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2 \ln(x) > -3 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2 \ln(x) + 3 < 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2 \ln(x) + 3 = 0 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ 2 \ln(x) + 3 > 0 & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)^2 \ln(e^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

Le point  $(\frac{1}{\sqrt{e^3}} ; -\frac{3}{2e^3})$  est un point d'inflexion.

7)

