9.2

1) $\varphi'(x) = \big(f(x)\,f(-x)\big)'$
$$\begin{aligned} &= f'(x)\,f(-x) + f(x)\,\big(f(-x)\big)' \\ &= f'(x)\,f(-x) + f(x)\,f'(-x)\,\underbrace{(-x)'}_{-1} \\ &= f'(x)\,f(-x) - f(x)\,f'(-x) \\ &= f(x)\,f(-x) - f(x)\,f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) $\varphi(0) = f(0)\,f(-0) = f(0)\,f(0) = 1 \cdot 1 = 1$

Puisque $\varphi'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction φ est constante.

C'est pourquoi $\varphi(x) = \varphi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $f(x)\,f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) L'égalité $f(x)\,f(-x) = 1$ implique $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En effet, si l'on avait $f(x) = 0$, alors on obtiendrait la contradiction $1 = f(x)\,f(-x) = 0 \cdot f(-x) = 0$.
La fonction f n'admet ainsi aucun zéro.