9.20

1) Vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(1) = \dfrac{e^1 - 1}{e^1} = \dfrac{e-1}{e} \approx 0{,}632$

$f(-1) = \dfrac{e^{-1} - 1}{e^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{e} - 1}{\frac{1}{e}} = 1 - e \approx -1{,}719$

Puisque $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.

Comme $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

3) Grâce à l'exercice 1.6 2), on sait que $e^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > x$ ou encore $e^x - x > 0$.

Il en résulte que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x} = \dfrac{e^{-\infty} - (-\infty)}{e^{-\infty}} = \dfrac{0 + \infty}{0_+} = +\infty$

La fonction f ne possède pas d'asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - x}{x\, e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x\, e^x} - \frac{x}{x\, e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x}$$
$$= \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{e^{-\infty}} = 0_- - \frac{1}{0_+} = 0_- - (+\infty) = -\infty$$

La fonction f n'a donc pas d'asymptote oblique à gauche.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{e^x} = \dfrac{e^{+\infty} - (+\infty)}{e^{+\infty}} = \dfrac{+\infty - \infty}{+\infty}$: indéterminé

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x - x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty}}$$
$= \dfrac{+\infty - 1}{+\infty} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$: indéterminé

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

La fonction f admet $y = 1$ comme asymptote horizontale à droite.

5) $$f'(x) = \left(\frac{e^x - x}{e^x}\right)'$$
$$= \frac{(e^x - x)'\, e^x - (e^x - x)\,(e^x)'}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{(e^x - 1)\, e^x - (e^x - x)\, e^x}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^x \big((e^x - 1) - (e^x - x)\big)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^x\,(x - 1)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{x-1}{e^x}$$

		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a déjà calculé $f(1) = \frac{e-1}{e}$.
Ainsi le point $(1\,;\frac{e-1}{e})$ est le minimum absolu de la fonction f.

6) $$f''(x) = \left(\frac{x-1}{e^x}\right)'$$
$$= \frac{(x-1)'\,e^x - (x-1)\,(e^x)'}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{1 \cdot e^x - (x-1)\,e^x}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^x\,\big(1-(x-1)\big)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^x\,(2-x)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{2-x}{e^x}$$

		2	
$2-x$	$+$	0	$-$
e^x	$+$		$+$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl	$\frown$

$f(2) = \frac{e^2-2}{e^2}$
Le point $(2\,;\frac{e^2-2}{e^2})$ est un point d'inflexion.

7)