9.21 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, donc $e^x + 2 > 2$, de sorte que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(1) = \dfrac{e^1 - 1}{e^1 + 2} = \dfrac{e - 1}{e + 2} \approx 0{,}364$

$f(-1) = \dfrac{e^{-1} - 1}{e^{-1} + 2} = \dfrac{\frac{1}{e} - 1}{\frac{1}{e} + 2} = \dfrac{1 - e}{1 + 2\,e} \approx -0{,}27$

Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.

Vu que $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

3)

		0	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$e^x + 2$	$+$		$+$
f	$-$	0	$+$

4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$

La fonction f admet $y = -\frac{1}{2}$ comme asymptote horizontale à gauche.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} + 2} = \frac{+\infty - 1}{+\infty + 2} = \frac{+\infty}{+\infty}$: indéterminé

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x + 2)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$

La fonction f admet $y = 1$ comme asymptote horizontale à droite.

5) $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 2}\right)' \\ &= \frac{(e^x - 1)'\,(e^x + 2) - (e^x - 1)\,(e^x + 2)'}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{e^x\,(e^x + 2) - (e^x - 1)\,e^x}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{e^x\,\big((e^x + 2) - (e^x - 1)\big)}{(e^x + 2)^2} \\ &= \frac{3\,e^x}{(e^x + 2)^2} \end{aligned}$$

$3\,e^x$	$+$
$(e^x + 2)^2$	$+$
f'	$+$
f	$\nearrow$

La fonction f est ainsi strictement croissante.

6) $$f''(x) = \left(\frac{3\,e^x}{(e^x+2)^2}\right)'$$

$$= \frac{(3\,e^x)'\,(e^x+2)^2 - 3\,e^x\,\big((e^x+2)^2\big)'}{\big((e^x+2)^2\big)^2}$$

$$= \frac{3\,e^x\,(e^x+2)^2 - 3\,e^x \cdot 2\,(e^x+2)\,\overbrace{(e^x+2)'}^{e^x}}{(e^x+2)^4}$$

$$= \frac{3\,e^x\,(e^x+2)^2 - 6\,(e^x)^2\,(e^x+2)}{(e^x+2)^4}$$

$$= \frac{3\,e^x\,(e^x+2)\,\big((e^x+2) - 2\,e^x\big)}{(e^x+2)^4}$$

$$= \frac{3\,e^x\,(2-e^x)}{(e^x+2)^3}$$

Étudions le signe de l'expression $2 - e^x$:

(a) $2 - e^x = 0$

$2 = e^x$

$\ln(2) = x$

(b) $$\begin{cases} e^x < 2 & \text{si } x < \ln(2) \\ e^x = 2 & \text{si } x = \ln(2) \\ e^x > 2 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} -e^x > -2 & \text{si } x < \ln(2) \\ -e^x = -2 & \text{si } x = \ln(2) \\ -e^x < -2 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2-e^x > 0 & \text{si } x < \ln(2) \\ 2-e^x = 0 & \text{si } x = \ln(2) \\ 2-e^x < 0 & \text{si } x > \ln(2) \end{cases}$$

		$\ln(2)$	
$3\,e^x$	$+$		$+$
$2-e^x$	$+$	0	$-$
$(e^x+2)^3$	$+$		$+$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	infl	$\frown$

$$f\big(\ln(2)\big) = \frac{e^{\ln(2)} - 1}{e^{\ln(2)} + 2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Le point $\big(\ln(2)\,;\frac{1}{4}\big)$ est un point d'inflexion.

7)