9.22

1) La fonction f n'est définie que si la fonction $\ln(x)$ est définie, c'est-à-dire si $x > 0$. Il en résulte $\mathrm{D}_f =]0\,;+\infty[$.

2) Attendu que le domaine de définition n'est pas symétrique, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

3) $f(x) = x\,\ln(x) - x = x\,\big(\ln(x) - 1\big)$

Étudions le signe de l'expression $\ln(x) - 1$

(a) $\ln(x) - 1 = 0$

$\ln(x) = 1$

$e^{\ln(x)} = e^1$

$x = e$

(b) $\begin{cases} \ln(x) < 1 & \text{si } x < e \\ \ln(x) = 1 & \text{si } x = e \\ \ln(x) > 1 & \text{si } x > e \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) - 1 < 0 & \text{si } x < e \\ \ln(x) - 1 = 0 & \text{si } x = e \\ \ln(x) - 1 > 0 & \text{si } x > e \end{cases}$

	0		e	
x	‖	$+$		$+$
$\ln(x) - 1$	‖	$-$	0	$+$
f	‖	$-$	0	$+$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,\ln(x) - x = 0_+ \cdot \ln(0_+) - 0_+ = 0_+ \cdot (-\infty)$: indéterminé

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,\ln(x) - x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,\big(\ln(x) - 1\big) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x) - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\big(\ln(x) - 1\big)'}{\big(\frac{1}{x}\big)'}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -x = 0_-$$

Le point $(0\,;0)$ est un point limite de la fonction f.

$$\lim_{x \to +\infty} x\,\ln(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x\,\big(\ln(x) - 1\big) = (+\infty) \cdot \big(\ln(+\infty) - 1\big)$$

$$= (+\infty) \cdot (+\infty - 1) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

La fonction f ne possède pas d'asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\,\ln(x) - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(x) - 1 = \ln(+\infty) - 1$$

$$= +\infty - 1 = +\infty$$

La fonction f n'a pas d'asymptote oblique à droite.

5) $f'(x) = \big(x\,\ln(x) - x\big)'$

$= \big(x\,\ln(x)\big)' - 1$

$$\begin{aligned}&= (x)' \ln(x) + x \big(\ln(x)\big)' - 1\\ &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x} - 1\\ &= \ln(x) + 1 - 1\\ &= \ln(x)\end{aligned}$$

	0		1	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = 1 \cdot 0 - 1 = -1$

Le point $(1\,;-1)$ est le minimum absolu de la fonction f.

6) $f''(x) = \big(\ln(x)\big)' = \dfrac{1}{x}$

	0	
1	‖	$+$
x	‖	$+$
f''	‖	$+$
f	‖	$\smile$

La fonction f est strictement convexe.

7)