9.3

1) $$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \big(f(-x)\,g(x)\big)' \\ &= \big(f(-x)\big)'\,g(x) + f(-x)\,g'(x) \\ &= f'(-x)\,\underbrace{(-x)'}_{-1}\,g(x) + f(-x)\,g'(x) \\ &= -f'(-x)\,g(x) + f(-x)\,g'(x) \\ &= -f(-x)\,g(x) + f(-x)\,g(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

2) $\varphi(0) = f(-0)\,g(0) = f(0)\,g(0) = 1 \cdot 1 = 1$

La fonction φ est constante, étant donné que sa dérivée est nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$. On a ainsi établi $f(-x)\,g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$1 = f(-x)\,g(x)$ donne après multiplication par $f(x)$:
$f(x) = \underbrace{f(x)\,f(-x)}_{1}\,g(x)$
$f(x) = g(x)$
On conclut dès lors à l'égalité des fonctions f et g.