9.4 1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La propriété $f(x)\,f(-x) = 1$ établie à l'exercice 9.2 s'écrit en l'occurrence $\exp(x)\exp(-x) = 1$.

Puisque $\exp(x) \neq 0$, en divisant cette dernière équation par $\exp(x)$, on obtient la formule $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$.

On pose $\varphi_y(x) = \exp(x+y)\exp(-x)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_y'(x) &= \big(\exp(x+y)\exp(-x)\big)' \\
&= \big(\exp(x+y)\big)'\exp(-x) + \exp(x+y)\,\big(\exp(-x)\big)' \\
&= \exp'(x+y)\,\underbrace{(x+y)'}_{1}\exp(-x) + \exp(x+y)\exp'(-x)\,\underbrace{(-x)'}_{-1} \\
&= \exp'(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp'(-x) \\
&= \exp(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp(-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_y'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction φ_y est constante.

On constate que $\varphi_y(0) = \exp(0+y)\exp(-0) = \exp(y)\exp(0)$
$= \exp(y)\cdot 1 = \exp(y)$.

Donc $\exp(y) = \varphi_y(0) = \varphi_y(x) = \exp(x+y)\exp(-x) = \exp(x+y)\,\dfrac{1}{\exp(x)}$

Il suffit de multiplier cette dernière égalité par $\exp(x)$ pour obtenir la formule $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

3) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x)\,\dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

4) Si $y = 1$, la propriété est clairement vérifiée :

$\exp(x\,y) = \exp(x\cdot 1) = \exp(x) = \big(\exp(x)\big)^1 = \big(\exp(x)\big)^y$

Montrons que si la formule $\exp(x\,y) = \big(\exp(x)\big)^y$ est vraie pour un certain $y \in \mathbb{N}$, alors elle l'est aussi pour $y+1$.

$\exp\big(x\,(y+1)\big) = \exp(x\,y + x) = \exp(x\,y)\exp(x) = \big(\exp(x)\big)^y\exp(x) = \big(\exp(x)\big)^{y+1}$