9.6

1) $\varphi'(x) = (e^x - x - 1)' = (e^x)' - (x)' - (1)' = e^x - 1 - 0 = e^x - 1$

Il s'agit d'étudier le signe de $e^x - 1$ pour étudier la croissance de φ.

Mais on sait que $e^0 = 1$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cela implique :

$$\begin{cases} e^x < 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x = 1 & \text{si } x = 0 \\ e^x > 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \iff \begin{array}{ll} e^x - 1 < 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 = 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - 1 > 0 & \text{si } x > 0 \end{array}$$

Nous disposons à présent des informations nécessaires à l'étude de la croissance de la fonction φ.

φ'	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\varphi(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

2) Puisque le point $(0\,;0)$ est un minimum global de la fonction φ, il en résulte $\quad 0 \leqslant \varphi(x) = e^x - x - 1 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Voilà qui équivaut à $\quad e^x \geqslant x + 1 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x \geqslant \lim_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ entraîne $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\,.$

4) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0_+$