9.9

1) La fonction $f(x) = \ln(x+3)$ n'est définie que si $x + 3 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$. Par conséquent $\mathrm{D}_f = \,]-3\,;+\infty[$.

2) Pour que la fonction $f(x) = \ln(4\,x - 5)$ soit définie, il faut que $4\,x - 5 > 0$, à savoir $4\,x > 5$ ou encore $x > \frac{5}{4}$. On en déduit $\mathrm{D}_f = \,]\,\frac{5}{4}\,;+\infty\,[$.

3) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto e^y$ admettent $\mathbb{R}$ pour ensemble de définition. C'est pourquoi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

4) Si la fonction $y \mapsto e^y$ est définie sur tout $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est en revanche pas définie si $x = 0$. On conclut donc que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

5) La fonction $f(x) = \ln(x^2 - x)$ n'est définie que si $x^2 - x = x\,(x-1) > 0$.

		0		1	
x	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$x\,(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Cette étude du signe montre que $\mathrm{D}_f = \,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

6) Pour que la fonction $f(x) = \ln(4 - x^2)$ soit définie, il faut que $4 - x^2 = (2+x)\,(2-x) > 0$.

		-2		2	
$2+x$	$-$	0	$+$	|	$+$
$2-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$(2+x)\,(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

À partir de cette étude du signe, on tire que $\mathrm{D}_f = \,]-2\,;2\,[$.

7) La fonction $y \mapsto e^y$ admet $\mathbb{R}$ pour ensemble de définition, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ n'est définie que si $x^2 + x = x\,(x+1) \geqslant 0$.

		-1		0	
x	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x\,(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'étude du signe conduit à $\mathrm{D}_f = \,]-\infty\,;-1\,] \cup [\,0\,;+\infty[$.

8) La fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ est définie si $\dfrac{x^2}{1-x} > 0$ et si $1 - x \neq 0$.

		0		1	
x^2	$+$	0	$+$	||	$+$
$1-x$	$+$	|	$+$	||	$-$
$\frac{x^2}{1-x}$	$+$	0	$+$	||	$-$

Il apparaît donc que $\mathrm{D}_f = \,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$.

9) La fonction $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$ est définie si $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ et si $x+1 \neq 0$.
En effet $\sqrt{y} > 0$ pour tout $y > 0$.

		-1		1	
$x-1$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Cette étude du signe délivre $\mathrm{D}_f = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]\,1\,;+\infty\right[$.

10) La fonction $f(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$ est définie si $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$.
On conclut dès lors que $\mathrm{D}_f = \left]\,1\,;+\infty\right[$.