1 Généralités sur les fonctions

Une **fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles** est une application d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Le plus souvent, on dit « fonction de E vers $\mathbb{R}$ » ou tout simplement « fonction ». Pour une fonction de E vers $\mathbb{R}$, on utilise la notation suivante :

$$\begin{aligned} f\,:\ \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Ensemble de définition

On se donne couramment une fonction au moyen d'une expression $f(x)$ en la variable x. L'**ensemble de définition** d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe.

1.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 + 7\,x + 12$
2) $f(x) = \dfrac{2\,x - 3}{x + 7}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 8\,x + 15}$
4) $f(x) = \dfrac{3\,x + 8}{2\,x^2 + 3}$
5) $f(x) = \dfrac{3\,x + 8}{2\,x^2 + 3\,x}$
6) $f(x) = \dfrac{3}{|x^2 - 5\,x| + 1}$
7) $f(x) = \dfrac{5\,x - 1}{|x| + x}$
8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
9) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$
10) $f(x) = \sqrt{7\,x - x^2 - 12}$
11) $f(x) = \sqrt{x + 1}\,\sqrt{x - 3}$
12) $f(x) = \sqrt{(x + 1)\,(x - 3)}$
13) $f(x) = \sqrt{|x + 1|}\,\sqrt{|x - 3|}$
14) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 3}}$
15) $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x + 1}{x - 3}\right|}$
16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1}}$

Graphe

Dans le plan muni d'un système d'axes, l'ensemble des points de coordonnées $\big(x\,;f(x)\big)$ où $x \in \mathrm{D}_f$ constitue la **représentation graphique** de f ou **courbe représentative** de f ou, plus simplement, le **graphe** de f.

1.2 Déterminer l'ensemble de définition, étudier le signe, puis représenter graphiquement les fonctions suivantes pour $x \in [-3\,;3]$:

1) $f(x) = 2\,x - 1$
2) $f(x) = -\frac{1}{3}\,x + 2$

3) $f(x) = x^2 - 2\,x$ 4) $f(x) = -x^2 + 1$

5) $f(x) = |x|$ 6) $f(x) = \sqrt{x+2}$

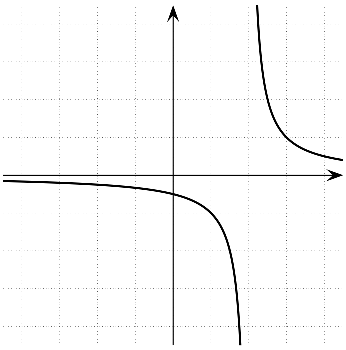
1.3 On considère les fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad f_2(x) = (x-2)^2$ $\quad f_3(x) = 2^x$

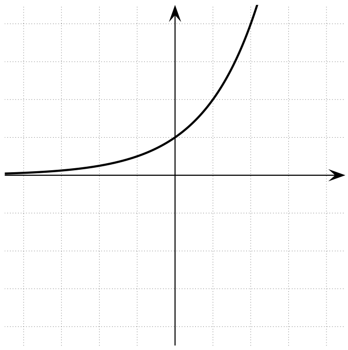
$f_4(x) = (\sqrt{x-2})^2$ $\quad f_5(x) = x^2 - 2$ $\quad f_6(x) = x - 2$

Déterminer, parmi les graphes ci-dessous, lequel correspond à chacune de ces fonctions.

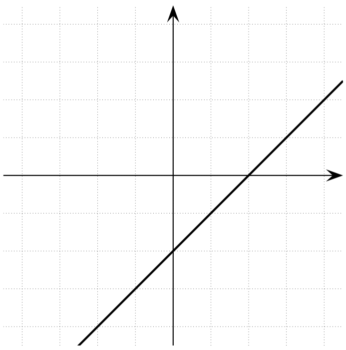
1)



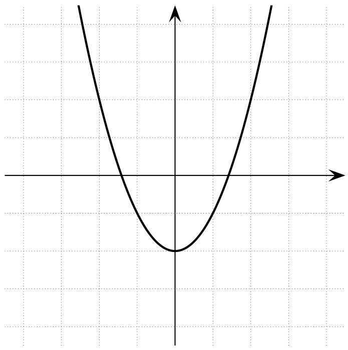
2)



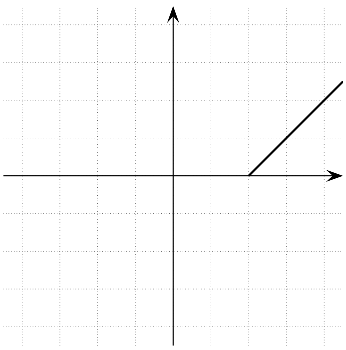
3)



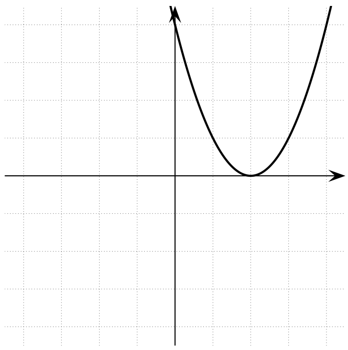
4)



5)



6)



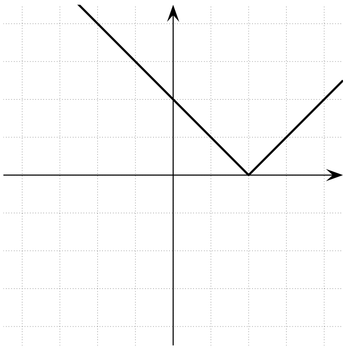
1.4 On considère les fonctions suivantes :

$f_1(x) = -x^2 + 2$ $\quad f_2(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad f_3(x) = |x-2|$

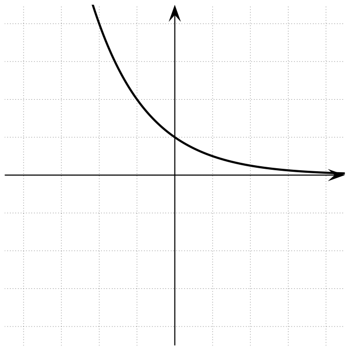
$f_4 = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\quad f_5(x) = (x-2)^3$ $\quad f_6(x) = 2^{-x}$

Déterminer, parmi les graphes ci-dessous, lequel correspond à chacune de ces fonctions.

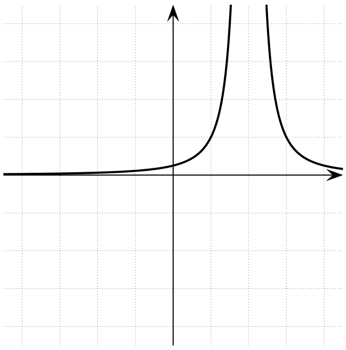
1)



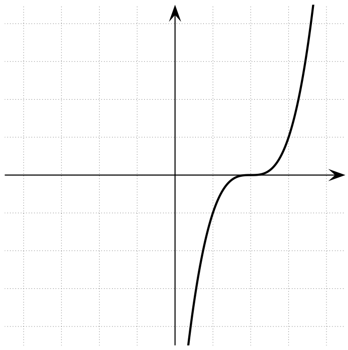
2)



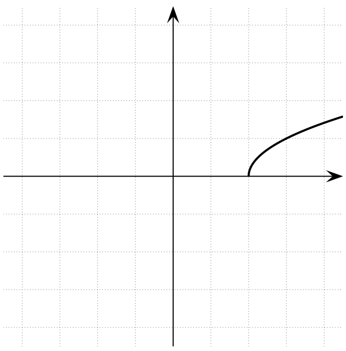
3)



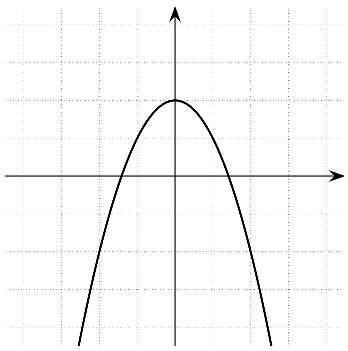
4)



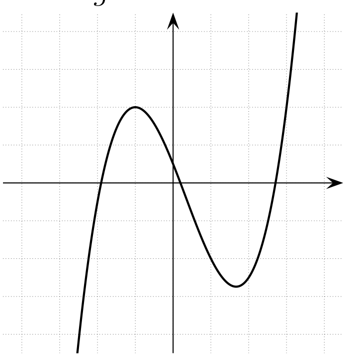
5)



6)



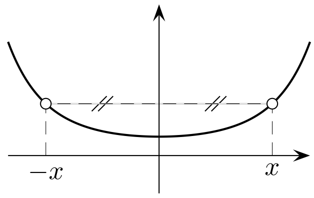
1.5 Déduire le graphe de la fonction g de celui de la fonction f.



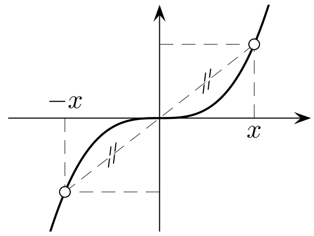
1) $g(x) = f(x) + 1$	2) $g(x) = f(x) - 1$	3) $g(x) = f(x+1)$
4) $g(x) = f(x-1)$	5) $g(x) = -f(x)$	6) $g(x) = f(-x)$
7) $g(x) = \lvert f(x)\rvert$	8) $g(x) = \lvert f(x)\rvert + 1$	9) $g(x) = f(\lvert x\rvert)$

Parité

Une fonction est dite **paire** si $\boxed{f(-x) = f(x)}$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.
La courbe représentant le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.



Une fonction est dite **impaire** si $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ pour tout $x \in \mathrm{D}_f$.
La courbe représentant le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



1.6 Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions suivantes :

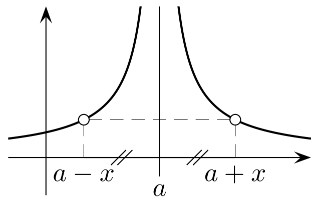
1) $f(x) = 5\,x^4 - 3\,x^2 + 2$
2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
3) $f(x) = x^3 - 2\,x$
4) $f(x) = \dfrac{3\,x^2 - 2}{2\,x}$
5) $f(x) = \dfrac{1}{2\,x^2 + x + 1}$
6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\,x}{x^2 + 1}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$
9) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x - 2}$
10) $f(x) = \dfrac{4\,x}{x - 5}$
11) $f(x) = \sin(x)$
12) $f(x) = \cos(x)$

1.7

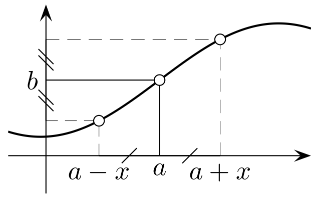
1) Que peut-on dire des fonctions $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et $\dfrac{f}{g}$ si f et g sont deux fonctions paires ?
2) Mêmes questions si f et g sont impaires.
3) Mêmes questions si f est paire et g impaire.

Autres symétries

Le graphe d'une fonction f admet un axe de symétrie d'équation $x = a$ si $\boxed{f(a - x) = f(a + x)}$ pour tout x tel que $a + x \in \mathrm{D}_f$.



Le graphe d'une fonction f admet le point $\mathrm{C}(a\,;b)$ comme centre de symétrie si $\boxed{f(a - x) + f(a + x) = 2\,b}$ pour tout x tel que $a + x \in \mathrm{D}_f$.



1.8 Montrer que le graphe de la fonction admet la symétrie proposée.

1) $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + 3$	$x = 2$
2) $f(x) = \lvert x+3\rvert + 2$	$x = -3$
3) $f(x) = x^3 + 3\,x^2 - x + 1$	$\mathrm{C}(-1\,;4)$
4) $f(x) = x^4 + 2\,x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 4$	$x = -\frac{1}{2}$
5) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$	$x = -\frac{b}{2\,a}$
6) $f(x) = \dfrac{2\,x+1}{x-3}$	$\mathrm{C}(3\,;2)$
7) $f(x) = x - 4 - \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{C}(0\,;-4)$
8) $f(x) = \dfrac{4\,x^2 + 8\,x + 3}{x^2 + 2\,x - 3}$	$x = -1$
9) $f(x) = 1 - \dfrac{2\,x^3}{x^2+1}$	$\mathrm{C}(0\,;1)$
10) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x-2}$	$\mathrm{C}(2\,;3)$

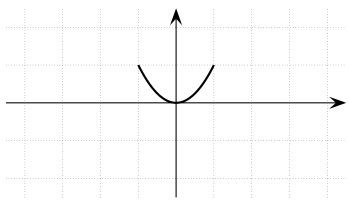
Périodicité

1.9

1) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur l'intervalle $[-4\,\pi\,;4\,\pi]$.
2) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[-4\,\pi\,;4\,\pi]$.
3) Qu'observe-t-on ?

Une fonction f de D_f vers $\mathbb{R}$ est **périodique** s'il existe $p > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on ait $\boxed{f(x+p) = f(x)}$.
Le plus petit nombre réel $p > 0$ satisfaisant à cette condition est appelé **période** de f.

1.10 La fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$ de période 2. On a représenté ci-dessous f sur $[-1\,;1]$. Compléter le tracé de f sur $[-4\,;4]$.



Composition de fonctions

La **fonction composée** de deux fonctions f et g, notée $g \circ f$ (lire g rond f), est définie par $\boxed{\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big)}$.
L'ensemble de définition de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les x de l'ensemble de définition de f tels que $f(x)$ est dans l'ensemble de définition de g.

1.11 On donne deux fonctions f et g ; calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

1) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = 2\,x + 1$

2) $f(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = 2\,x - 6$

4) La composition des fonctions est-elle commutative ?

1.12 Montrer que la composition des fonctions est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

1.13 On donne les fonctions $f(x) = 3\,x$, $g(x) = x - 2$ et $h(x) = 2\,x - 3$. Déterminer

1) $f \circ g$ $\qquad$ 2) $g \circ f$ $\qquad$ 3) $f \circ f$

4) $f \circ g \circ h$ $\qquad$ 5) $g \circ f \circ h$ $\qquad$ 6) $h \circ g \circ h$

Fonction réciproque

Soit une fonction $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{E}$. On appelle **fonction réciproque** de f une fonction, notée ${}^rf$, telle que $\big({}^rf \circ f\big)(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{D}$ et $\big(f \circ {}^rf\big)(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{E}$.

Deux conditions doivent être remplies pour qu'une telle fonction réciproque existe :

1) f doit être **surjective** : $f(\mathrm{D}) = \mathrm{E}$ c'est-à-dire que pour tout élément y de E, il existe $x \in \mathrm{D}$ tel que $f(x) = y$;
2) f doit être **injective** : $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

On dit d'une fonction à la fois surjective et injective qu'elle est **bijective**.

1.14

1) Pourquoi la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est-elle pas surjective ? Quel doit être l'ensemble d'arrivée E pour que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ soit surjective ?

2) Pourquoi la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est-elle pas injective ? Quel doit être l'ensemble de départ D pour que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ soit injective ?

3) Quelle est la fonction réciproque de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$?

1.15 Déterminer la fonction réciproque des fonctions suivantes en précisant les ensembles de départ et d'arrivée.

1) $f(x) = 2\,x + 3$ $\qquad$ 2) $f(x) = x^2 + 3$

3) $f(x) = \dfrac{2\,x + 1}{x - 1}$ $\qquad$ 4) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

1.16 1) (a) Représenter le graphe de la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x+3 \end{array}$ et celui de sa fonction réciproque $^r\!f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y-3}{2} \end{array}$.

(b) Représenter le graphe de la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [3\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$ et celui de sa fonction réciproque $^r\!f: \begin{array}{rcl} [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y-3} \end{array}$.

(c) Représenter le graphe de la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\,x+1}{x-1} \end{array}$ et celui de sa fonction réciproque $^r\!f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{1\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{y-2} \end{array}$.

2) Représenter, sur chacun des graphiques précédents, la bissectrice du premier quadrant. Que constate-t-on ?

3) Démontrer ce constat.

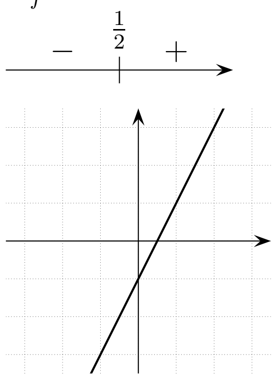
Réponses

1.1

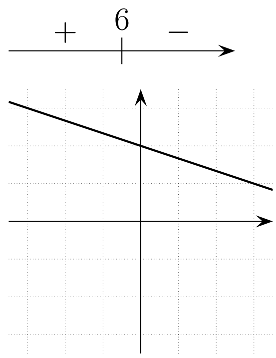
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
2) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-7\}$
3) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$
4) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
5) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\,;0\}$
6) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
7) $\mathrm{D}_f =]0\,;+\infty[$
8) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$
9) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
10) $\mathrm{D}_f = [3\,;4]$
11) $\mathrm{D}_f = [3\,;+\infty[$
12) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$
13) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$
14) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1] \cup]3\,;+\infty[$
15) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$
16) $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1[\cup [0\,;1[$

1.2

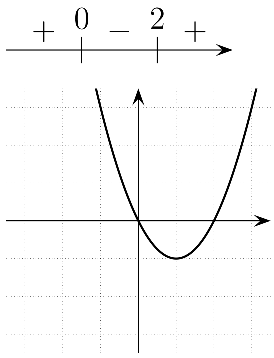
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$



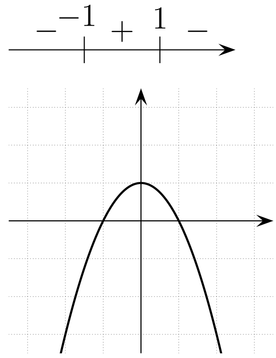
2) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$



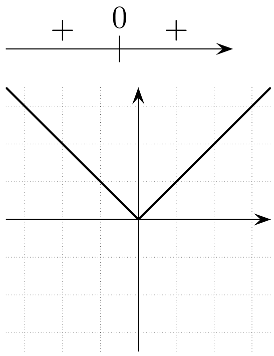
3) $D_f = \mathbb{R}$



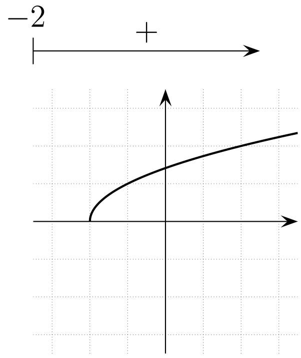
4) $D_f = \mathbb{R}$



5) $D_f = \mathbb{R}$



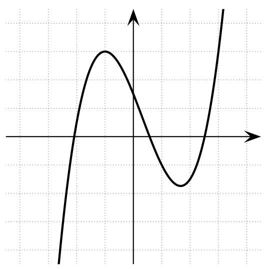
6) $D_f = [-2\,;+\infty[$



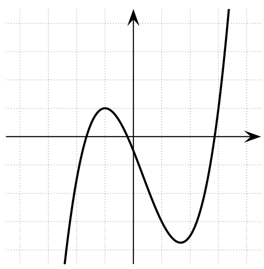
1.3 f_1 : 1) f_2 : 6) f_3 : 2)
f_4 : 5) f_5 : 4) f_6 : 3)

1.4 f_1 : 6) f_2 : 5) f_3 : 1)
f_4 : 3) f_5 : 4) f_6 : 2)

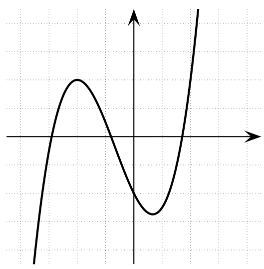
1.5 1)



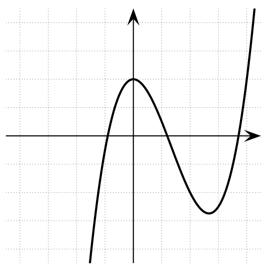
2)



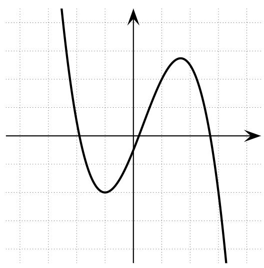
3)



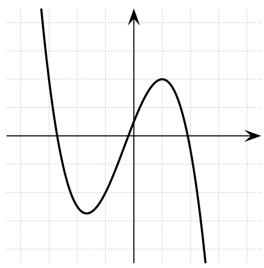
4)

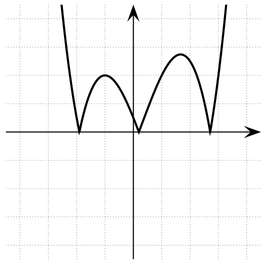
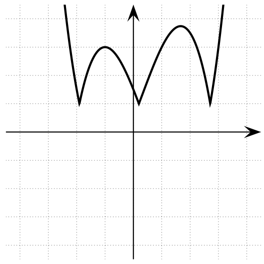
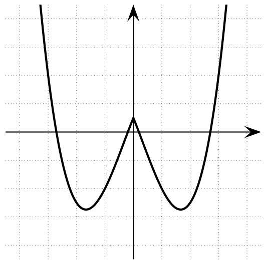


5)



6)



7)  8)  9) 

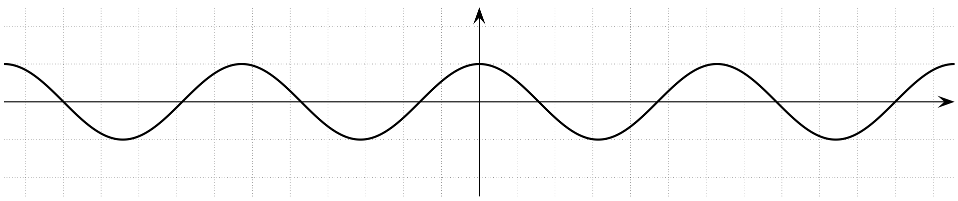
1.6

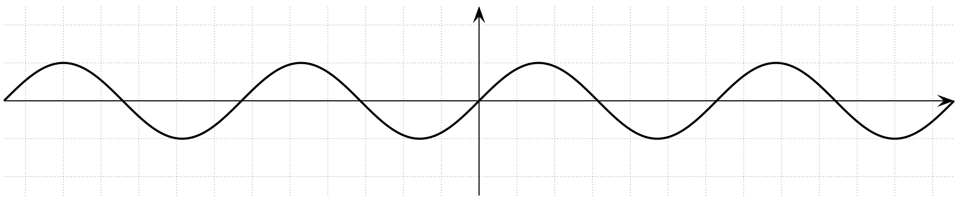
1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ paire
2) $\mathrm{D}_f = [\,-1\,;1\,]$ paire
3) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ impaire
4) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$ impaire
5) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ quelconque
6) $\mathrm{D}_f =]-1\,;1\,[$ paire
7) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ impaire
8) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$ paire
9) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$ paire
10) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{5\}$ quelconque
11) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ impaire
12) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ paire

1.7

	$f+g$	$f-g$	$f\cdot g$	$\dfrac{f}{g}$
1)	paire	paire	paire	paire
2)	impaire	impaire	paire	paire
3)	quelconque	quelconque	impaire	impaire

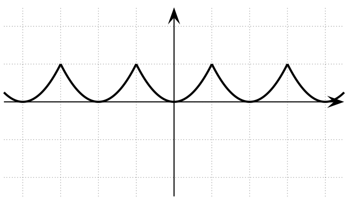
1.9

1) 

2) 

3) Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont périodiques de période $2\,\pi$.

1.10



1.11

1) $\big(g \circ f\big)(x) = 2\,x^2 + 1$ $\qquad \big(f \circ g\big)(x) = 4\,x^2 + 4\,x + 1$

2) $\big(g \circ f\big)(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad \big(f \circ g\big)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

3) $\big(g \circ f\big)(x) = 2\sqrt{x} - 6 \qquad \big(f \circ g\big)(x) = \sqrt{2x-6}$

4) La composition des fonctions n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$.

1.13

1) $\big(f \circ g\big)(x) = 3x - 6$ 2) $\big(g \circ f\big)(x) = 3x - 2$

3) $\big(f \circ f\big)(x) = 9x$ 4) $\big(f \circ g \circ h\big)(x) = 6x - 15$

5) $\big(g \circ f \circ h\big)(x) = 6x - 11$ 6) $\big(h \circ g \circ h\big)(x) = 4x - 13$

1.14

1) $\mathrm{E} = \mathbb{R}_+$ 2) $\mathrm{D} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathrm{D} = \mathbb{R}_-$ 3) $\begin{array}{rcl} {}^rf : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$

1.15

1) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+3 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} {}^rf : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y-3}{2} \end{array}$

2) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [3\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} {}^rf : [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y-3} \end{array}$

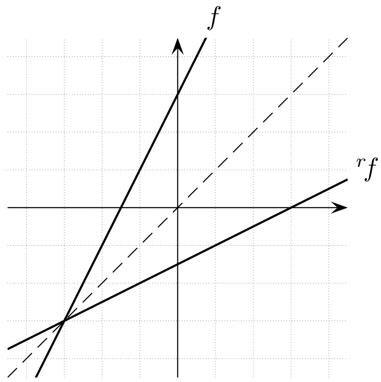
$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_- & \longrightarrow & [3\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} {}^rf : [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ y & \longmapsto & -\sqrt{y-3} \end{array}$

3) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$ $\begin{array}{rcl} {}^rf : \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{y-2} \end{array}$

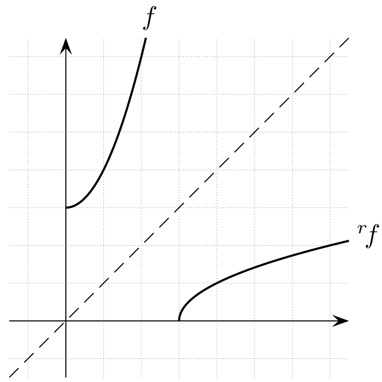
4) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$ $\begin{array}{rcl} {}^rf : \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{y-1} \end{array}$

1.16

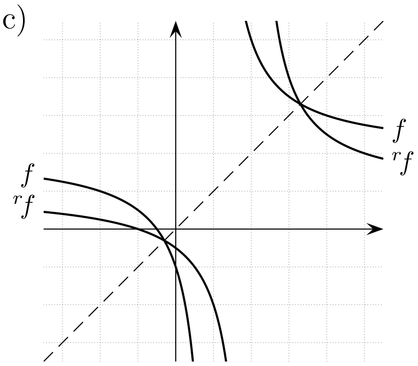
1) a)



b)



c)



2) Les graphes des fonctions f et ${}^rf$ sont symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant.