1.1

1) Un polynôme peut être évalué en n'importe quelle valeur ; par conséquent, son ensemble de définition est toujours l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2) La fonction $f(x) = \frac{2x-3}{x+7}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, puisqu'il est impossible de diviser par 0. En d'autres termes, la fonction f n'est pas définie si $x + 7 = 0$, c'est-à-dire si $x = -7$. C'est pourquoi, on conclut que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-7\}$.

3) La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+8x+15}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3) = 0$, à savoir si $x = -5$ ou si $x = -3$. On obtient ainsi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-5\,;-3\}$.

4) La fonction $f(x) = \frac{3x+8}{2x^2+3}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, en d'autres termes si $2x^2 + 3 = 0$. Mais cette équation n'admet aucune solution, car $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -24 < 0$, ou encore parce que l'égalité $2x^2 = -3$ est impossible, puisqu'un carré ne saurait être négatif. C'est pourquoi, on déduit que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R}$.

5) La fonction $f(x) = \frac{3x+8}{2x^2+3x}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $2x^2 + 3x = x(2x + 3) = 0$, donc si $x = 0$ ou si $x = -\frac{3}{2}$. On obtient ainsi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\,; 0\}$.

6) La fonction $f(x) = \frac{3}{|x^2-5x|+1}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule. Mais ce n'est jamais le cas, car $|x^2 - 5x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $|x^2 - 5x| + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est pourquoi on conclut que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

7) La fonction $f(x) = \frac{5x-1}{|x|+x}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $|x| + x = 0$. Or $|x| + x = \begin{cases} x + x = 2x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x + x = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Par conséquent, le dénominateur $|x| + x$ est non nul seulement si $x > 0$, de sorte que $\mathrm{D}_f = \,]0\,; +\infty[$

8) La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ n'est définie que si l'argument de la racine carrée est positif ou nul, en d'autres termes si $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \geqslant 0$.

		-3		3	
$x+3$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
x^2-9	$+$		$-$		$+$

Grâce à ce tableau de signes, on conclut que $\mathrm{D}_f = \,]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$.

9) La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ n'est définie que si l'argument de la racine carrée est positif ou nul, c'est-à-dire si $x^2 + 9 \geqslant 0$. Or c'est toujours le cas, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, étant donné que $x^2 \geqslant 0$ implique $x^2 + 9 \geqslant 9 > 0$. On aboutit donc à $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

10) La fonction $f(x) = \sqrt{7\,x - x^2 - 12}$ n'est définie que si $7\,x - x^2 - 12 \geqslant 0$, à savoir seulement si $x^2 - 7\,x + 12 = (x-3)\,(x-4) \leqslant 0$.

		3		4	
$x-3$	$-$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$+$
$x^2 - 7\,x + 12$	$+$		$-$		$+$

Ce tableau de signes conduit à la conclusion $\mathrm{D}_f = [3\,;4]$.

11) Pour que la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}\,\sqrt{x-3}$ soit définie, il faut que l'argument de chaque racine carrée soit positif ou nul : on doit avoir d'une part $x + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant -1$, et d'autre part $x - 3 \geqslant 0$, à savoir $x \geqslant 3$. Ces deux conditions sont simultanément remplies lorsque $x \geqslant 3$, d'où suit $\mathrm{D}_f = [3\,;+\infty[$.

12) La fonction $f(x) = \sqrt{(x+1)\,(x-3)}$ est définie si l'argument de la racine carrée est positif ou nul, donc si $(x+1)\,(x-3) \geqslant 0$.

		-1		3	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
$(x+1)\,(x-3)$	$+$		$-$		$+$

Ce tableau de signes donne $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$.

13) La fonction $f(x) = \sqrt{|x+1|}\,\sqrt{|x-3|}$ n'est définie que si l'argument de chaque racine carrée est positif ou nul. Or $|x+1| \geqslant 0$ et $|x-3| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'on tire que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

14) La fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ est définie si le dénominateur $x-3$ ne s'annule pas, c'est-à-dire si $x \neq 3$, et si l'argument de la racine carrée est positif ou nul, en d'autres termes si $\frac{x+1}{x-3} \geqslant 0$.

		-1		3	
$x+1$	$-$		$+$	$\Vert$	$+$
$x-3$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$		$-$	$\Vert$	$+$

Au vu de ce tableau de signes, on conclut que $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;-1] \cup]3\,;+\infty[$.

15) Pour que la fonction $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-3}\right|}$ soit définie, il faut d'une part que le dénominateur ne s'annule pas et d'autre part que l'argument de la racine carrée soit positif ou nul. La première condition entraîne $x \neq 3$, tandis que la seconde est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. On obtient dès lors $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

16) La fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}}$ est définie si les dénominateurs ne s'annulent pas, c'est-à-dire si $x \neq -1$ et si $x \neq 1$, et si l'argument de la racine carrée est positif ou nul. Or ce dernier vaut $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x\,(x-1) - x\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{x\big((x-1)-(x+1)\big)}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{-2\,x}{(x+1)\,(x-1)}$.

		-1		0		1	
$-2\,x$	$+$	‖	$+$	|	$-$	‖	$-$
$x+1$	$-$	‖	$+$	|	$+$	‖	$+$
$x-1$	$-$	‖	$-$	|	$-$	‖	$+$
$\frac{-2\,x}{(x+1)\,(x-1)}$	$+$	‖	$-$	|	$+$	‖	$-$

Grâce à ce tableau de signes, on obtient finalement $\mathrm{D}_f = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left[0\,;1\right[$.