

**1.14**

1) Quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = x^2 \geq 0$ .

Si  $y < 0$ , il n'existe ainsi aucun  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = x^2 = y$ . C'est la raison pour laquelle la fonction  $f$  n'est pas surjective.

Si l'ensemble d'arrivée est  $E = \mathbb{R}_+$ , alors la fonction  $f$  est surjective. En effet, pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , on constate que  $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ , c'est-à-dire qu'il existe  $x = \sqrt{y}$  tel que  $f(x) = y$ .

2) Soient  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $f(x_1) = f(x_2)$ , c'est-à-dire  $x_1^2 = x_2^2$ . On en déduit  $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ . Cela implique non seulement  $x_1 = x_2$ , mais aussi  $x_1 = -x_2$ . Mais, sauf s'ils sont nuls, deux nombres opposés ne sont pas égaux. C'est pourquoi la fonction  $f$  n'est pas injective.

La fonction  $f$  devient injective si l'on exige que  $x_1$  et  $x_2$  soient de même signe. Cette condition est satisfaite lorsque l'ensemble de départ  $D$  est  $\mathbb{R}_+$  ou bien  $\mathbb{R}_-$ .

3) Puisque la fonction  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est bijective, elle admet une fonction

$$x \longmapsto x^2$$

réciproque.

La fonction réciproque s'obtient en résolvant l'équation  $f(x) = x^2 = y$ .

Cette équation admet deux solutions  $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$  ou  $x = -\sqrt{y} \in \mathbb{R}_-$ .

Vu le choix de l'ensemble de départ de la fonction  $f$ , on conclut que la fonction réciproque de  $f$  est donnée par

$$y \longmapsto \sqrt{y}$$