1.15 1) La fonction réciproque s'obtient en résolvant l'équation
$f(x) = 2\,x + 3 = y$.
$2\,x = y - 3$
$x = \dfrac{y-3}{2}$
On a ainsi trouvé ${}^r\!f(y) = \dfrac{y-3}{2}$.
Comme le domaine de définition de la fonction ${}^r\!f$ est $\mathbb{R}$, la fonction f est surjective si son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.
Étant donné que la résolution de l'équation $f(x) = y$ a conduit à une solution unique, la fonction f est injective sur son ensemble de définition $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.
En conclusion on a trouvé : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\,x+3 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} {}^r\!f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y-3}{2} \end{array}$

2) Pour découvrir la fonction réciproque, résolvons l'équation
$f(x) = x^2 + 3 = y$
$x^2 = y - 3$
$x_1 = \sqrt{y-3}$ ou $x_2 = -\sqrt{y-3}$
Il y a donc deux fonctions réciproques possibles :
${}^r\!f_1(y) = \sqrt{y-3}$ ou ${}^r\!f_2(y) = -\sqrt{y-3}$.
Comme les fonctions réciproques ${}^r\!f_1$ et ${}^r\!f_2$ admettent pour ensemble de définition $[3\,;+\infty[$, la fonction f doit avoir pour ensemble d'arrivée $[3\,;+\infty[$ pour être surjective.
Vu que ${}^r\!f_1(y) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $y \in [3\,;+\infty[$ et que ${}^r\!f_2(y) \in \mathbb{R}_-$ pour tout $y \in [3\,;+\infty[$, l'ensemble de départ de la fonction f peut être ou bien $\mathbb{R}_+$ ou bien $\mathbb{R}_-$.
En résumé, on a obtenu deux fonctions réciproques possibles, selon le choix de l'ensemble de départ de la fonction f :
$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [3\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} {}^r\!f_1 : [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y-3} \end{array}$
$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_- & \longrightarrow & [3\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} {}^r\!f_2 : [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ y & \longmapsto & -\sqrt{y-3} \end{array}$

3) Trouvons la fonction réciproque grâce à la résolution de l'équation
$f(x) = \dfrac{2\,x+1}{x-1} = y$
$2\,x + 1 = y\,(x-1) = x\,y - y$
$2\,x - x\,y = -y - 1$
$x\,(2-y) = -y - 1$
$x = \dfrac{-y-1}{2-y} = \dfrac{y+1}{y-2}$
Puisque la fonction réciproque est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, la fonction f est surjective si son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R} - \{2\}$.

Attendu que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique, la fonction f est injective sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a obtenu $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2\,x+1}{x-1} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} {}^r\!f: & \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ & y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{y-2} \end{array}$

4) La fonction réciproque résulte de la résolution de l'équation

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = y$

$x + 1 = y\,(x-1) = x\,y - y$

$x - x\,y = -y - 1$

$x\,(1-y) = -y - 1$

$x = \dfrac{-y-1}{1-y} = \dfrac{y+1}{y-1}$

Vu que le domaine de définition de la fonction réciproque est $\mathbb{R} - \{1\}$, l'ensemble d'arrivée de la fonction f doit être $\mathbb{R} - \{1\}$ pour assurer sa surjectivité.

La résolution de l'équation $f(x) = y$ n'ayant délivré qu'une unique solution, la fonction f est injective sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a ainsi $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} {}^r\!f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ & y & \longmapsto & \dfrac{y+1}{y-1} \end{array}$

On remarque au passage que ${}^r\!f = f$.