1.16

3) Soit $\mathrm{P}(a\,;b)$ un point du plan. Montrons que le symétrique P' du point $\mathrm{P}(a\,;b)$ par rapport à la première bissectrice a pour coordonnées $\mathrm{P}'(b\,;a)$.

La première bissectrice a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire $\vec{d} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PP}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix} = 1 \cdot (b-a) + 1 \cdot (a-b) = 0$ montre que le segment PP' est perpendiculaire à la première bissectrice.

Le milieu des points $\mathrm{P}(a\,;b)$ et $\mathrm{P}'(b\,;a)$ a pour coordonnées $\mathrm{M}(\frac{a+b}{2}\,;\frac{a+b}{2})$. Vu que ses coordonnées sont égales, il appartient bien à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Soit $\big(x\,;f(x)\big)$ un point du graphe de f.
Son symétrique par rapport à la première bissectrice est
$\big(f(x)\,;x\big) = \Big(f(x)\,;{}^r\!f\big(f(x)\big)\Big) = \big(y\,;{}^r\!f(y)\big)$ avec $y = f(x)$.
Il fait donc partie du graphe de la fonction ${}^r\!f$.

Soit $\big(y\,;{}^r\!f(y)\big)$ un point du graphe de ${}^r\!f$.
Son symétrique par rapport à la première bissectrice a pour coordonnées
$\big({}^r\!f(y)\,;y\big) = \Big({}^r\!f(y)\,;f\big({}^r\!f(y)\big)\Big) = \big(x\,;f(x)\big)$ avec $x = {}^r\!f(y)$
Il appartient ainsi bien au graphe de la fonction f.