1.6 1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, vu que la fonction $f(x) = 5\,x^4 - 3\,x^2 + 2$ est polynomiale.
$f(-x) = 5\,(-x)^4 - 3\,(-x)^2 + 2 = 5\,x^4 - 3\,x^2 + 2 = f(x)$
La fonction f est donc paire.

2) La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie si $1 - x^2 = (1 + x)\,(1 - x) \geqslant 0$.

		-1		1	
$1 + x$	$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$-$
$1 - x^2$	$-$		$+$		$-$

Ce tableau de signes indique que $\mathrm{D}_f = [\,-1\,;1\,]$.

$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$
La fonction f est par conséquent paire.

3) Étant donné que $f(x) = x^3 - 2\,x$ est une fonction polynomiale, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.
$f(-x) = (-x)^3 - 2\,(-x) = -x^3 + 2\,x = -(x^3 - 2\,x) = -f(x)$
La fonction f est ainsi impaire.

4) La fonction $f(x) = \frac{3\,x^2 - 2}{2\,x}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $2\,x = 0$ ou encore si $x = 0$. On en déduit $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(-x) = \frac{3\,(-x)^2 - 2}{2\,(-x)} = \frac{3\,x^2 - 2}{-2\,x} = -\frac{3\,x^2 - 2}{2\,x} = -f(x)$$

Il apparaît donc que la fonction f est impaire.

5) La fonction $f(x) = \frac{1}{2\,x^2 + x + 1}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, en d'autres termes si $2\,x^2 + x + 1 = 0$. En cherchant à résoudre cette équation, on calcule $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$: il est donc impossible que le dénominateur s'annule, de sorte que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

$f(1) = \frac{1}{2 \cdot 1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{4}$
$f(-1) = \frac{1}{2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{1}{2}$
La fonction f ne saurait être paire, car dans ce cas on aurait
$\frac{1}{4} = f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$.
De même, la fonction f ne peut être impaire, sinon on aurait
$-\frac{1}{4} = -f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$.
En définitive, la fonction f est quelconque.

6) Pour que la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ soit définie, il faut non seulement que l'argument de la racine carrée soit positif, mais encore qu'il soit non nul. En résumé, la fonction f est définie si $1 - x^2 = (1 + x)\,(1 - x) > 0$.

		-1		1	
$1 + x$	$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$-$
$1 - x^2$	$-$		$+$		$-$

Ce tableau de signes permet de conclure que $\mathrm{D}_f =]-1\,;1\,[$.

$f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$

La fonction f est dès lors paire.

7) $x^2 \geqslant 0$ implique $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que le dénominateur ne s'annule jamais, si bien que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 2\,(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3+2\,x}{x^2+1} = -\dfrac{x^3-2\,x}{x^2+1} = -f(x)$

Il en résulte que la fonction f est impaire.

8) La fonction $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, en d'autres termes si $x^2-1 = (x+1)\,(x-1) = 0$, donc si $x=-1$ ou si $x=1$. C'est pourquoi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$.

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+2}{x^2-1} = f(x)$

La fonction f s'avère ainsi paire.

9) La fonction $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$ n'est pas définie si l'un des dénominateurs $x+2$ ou $x-2$ s'annule, c'est-à-dire si $x=-2$ ou si $x=2$. De là suit que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$.

$f(-x) = \dfrac{1}{-x+2} - \dfrac{1}{-x-2} = -\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} = f(x)$

La fonction f est par conséquent paire.

10) La fonction $f(x) = \frac{4\,x}{x-5}$ n'est pas définie si son dénominateur s'annule, à savoir si $x-5=0$. On en déduit que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{5\}$.

La fonction f ne peut être ni paire ni impaire : sinon, son ensemble de définition devrait être symétrique. Or il ne l'est pas, puisque la fonction f est définie en -5, mais non en 5. C'est pourquoi la fonction f est quelconque.

11) Comme $\sin(x)$ existe pour tout nombre réel x, on a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

L'exercice 16.10 1) de première année a établi que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que la fonction $f(x) = \sin(x)$ est impaire.

12) Puisque $\cos(x)$ existe quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on conclut que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

L'exercice 16.10 1) de première année a montré que $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que la fonction $f(x) = \cos(x)$ est paire.