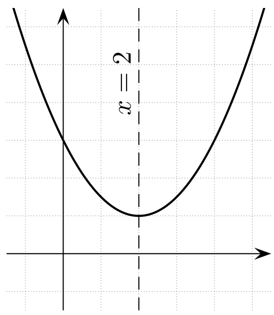
1.8 1) $f(2-x) = \frac{1}{2}\,(2-x)^2 - 2\,(2-x) + 3 = \frac{1}{2}\,(4 - 4\,x + x^2) - 2\,(2-x) + 3$
$= 2 - 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 - 4 + 2\,x + 3 = \frac{1}{2}\,x^2 + 1$

$f(2+x) = \frac{1}{2}\,(2+x)^2 - 2\,(2+x) + 3 = \frac{1}{2}\,(4 + 4\,x + x^2) - 2\,(2+x) + 3$
$= 2 + 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 - 4 - 2\,x + 3 = \frac{1}{2}\,x^2 + 1$

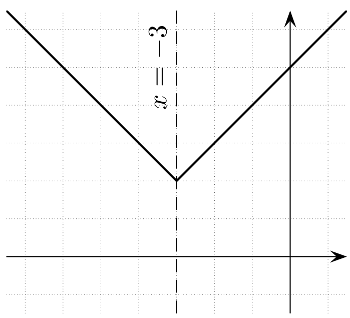
Étant donné que $f(2-x) = f(2+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le graphe de f admet l'axe de symétrie $x = 2$.



2) $f(-3-x) = |-3-x+3| + 2 = |-x| + 2 = x + 2$

$f(-3+x) = |-3+x-3| + 2 = |x| + 2 = x + 2$

Comme $f(-3-x) = f(-3+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction f admet pour axe de symétrie $x = -3$.

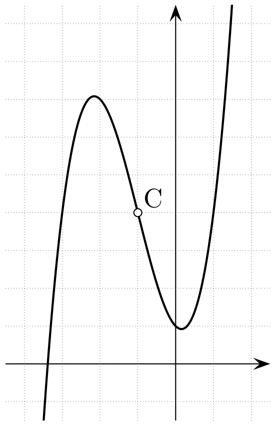


3) $f(-1-x) = (-1-x)^3 + 3\,(-1-x)^2 - (-1-x) + 1$
$= (-1 - 3\,x - 3\,x^2 - x^3) + 3\,(1 + 2\,x + x^2) - (-1-x) + 1$
$= -1 - 3\,x - 3\,x^2 - x^3 + 3 + 6\,x + 3\,x^2 + 1 + x + 1$
$= -x^3 + 4\,x + 4$

$f(-1+x) = (-1+x)^3 + 3\,(-1+x)^2 - (-1+x) + 1$
$= (-1 + 3\,x - 3\,x^2 + x^3) + 3\,(1 - 2\,x + x^2) - (-1+x) + 1$
$= -1 + 3\,x - 3\,x^2 + x^3 + 3 - 6\,x + 3\,x^2 + 1 - x + 1$
$= x^3 - 4\,x + 4$

$f(-1-x) + f(-1+x) = (-x^3 + 4\,x + 4) + (x^3 - 4\,x + 4) = 8 = 2 \cdot 4$

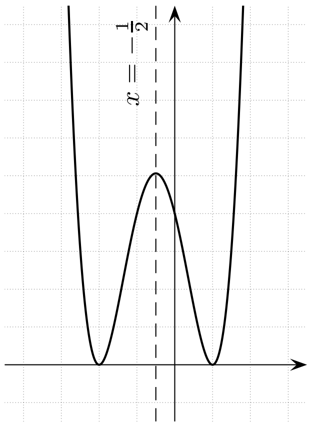
En définitive, le graphe de f admet le point $\mathrm{C}(-1\,;4)$ comme centre de symétrie.



4) $$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}-x) &= (-\tfrac{1}{2}-x)^4+2\,(-\tfrac{1}{2}-x)^3-3\,(-\tfrac{1}{2}-x)^2-4\,(-\tfrac{1}{2}-x)+4 \\ &= (\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{3}{2}\,x^2+2\,x^3+x^4)+2\,(-\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}\,x-\tfrac{3}{2}\,x^2-x^3) \\ &\quad -3\,(\tfrac{1}{4}+x+x^2)-4\,(-\tfrac{1}{2}-x)+4 \\ &= \tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{3}{2}\,x^2+2\,x^3+x^4-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{2}\,x-3\,x^2-2\,x^3 \\ &\quad -\tfrac{3}{4}-3\,x-3\,x^2+2+4\,x+4 \\ &= x^4-\tfrac{9}{2}\,x^2+\tfrac{81}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}+x) &= (-\tfrac{1}{2}+x)^4+2\,(-\tfrac{1}{2}+x)^3-3\,(-\tfrac{1}{2}+x)^2-4\,(-\tfrac{1}{2}+x)+4 \\ &= (\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{3}{2}\,x^2-2\,x^3+x^4)+2\,(-\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{4}\,x-\tfrac{3}{2}\,x^2+x^3) \\ &\quad -3\,(\tfrac{1}{4}-x+x^2)-4\,(-\tfrac{1}{2}+x)+4 \\ &= \tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{3}{2}\,x^2-2\,x^3+x^4-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{2}\,x-3\,x^2+2\,x^3 \\ &\quad -\tfrac{3}{4}+3\,x-3\,x^2+2-4\,x+4 \\ &= x^4-\tfrac{9}{2}\,x^2+\tfrac{81}{16} \end{aligned}$$

L'égalité $f(-\frac{1}{2}-x)=f(-\frac{1}{2}+x)$ garantit que la droite verticale $x=-\frac{1}{2}$ constitue un axe de symétrie du graphe de la fonction f.



5) $$\begin{aligned} f(-\tfrac{b}{2\,a}-x) &= a\,(-\tfrac{b}{2\,a}-x)^2+b\,(-\tfrac{b}{2\,a}-x)+c \\ &= a\,(\tfrac{b^2}{4\,a^2}+\tfrac{b}{a}\,x+x^2)+b\,(-\tfrac{b}{2\,a}-x)+c \\ &= \tfrac{b^2}{4\,a}+b\,x+a\,x^2-\tfrac{b^2}{2\,a}-b\,x+c \\ &= a\,x^2-\tfrac{b^2}{4\,a}+c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{b}{2a}+x) &= a\,(-\tfrac{b}{2a}+x)^2 + b\,(-\tfrac{b}{2a}+x) + c \\ &= a\,(\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b}{a}\,x + x^2) + b\,(-\tfrac{b}{2a}+x) + c \\ &= \tfrac{b^2}{4a} - b\,x + a\,x^2 - \tfrac{b^2}{2a} + b\,x + c \\ &= a\,x^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

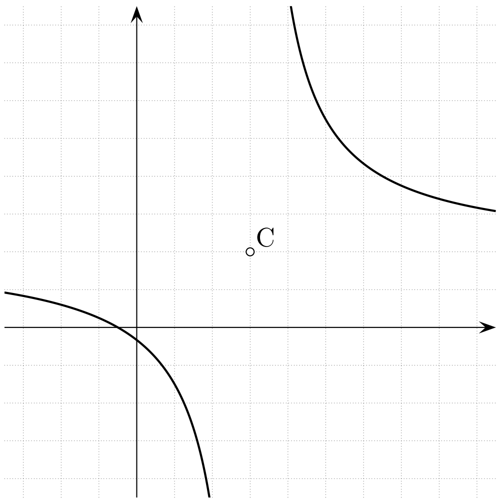
Comme $f(-\frac{b}{2a}-x) = f(-\frac{b}{2a}+x)$, le graphe de la fonction f admet $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

6) $f(3-x) = \dfrac{2\,(3-x)+1}{(3-x)-3} = \dfrac{7-2\,x}{-x} = \dfrac{2\,x-7}{x}$

$f(3+x) = \dfrac{2\,(3+x)+1}{(3+x)-3} = \dfrac{2\,x+7}{x}$

$f(3-x) + f(3+x) = \dfrac{2\,x-7}{x} + \dfrac{2\,x+7}{x} = \dfrac{4\,x}{x} = 4 = 2 \cdot 2$

Le graphe de la fonction f admet par conséquent le point C$(3\,;2)$ comme centre de symétrie.

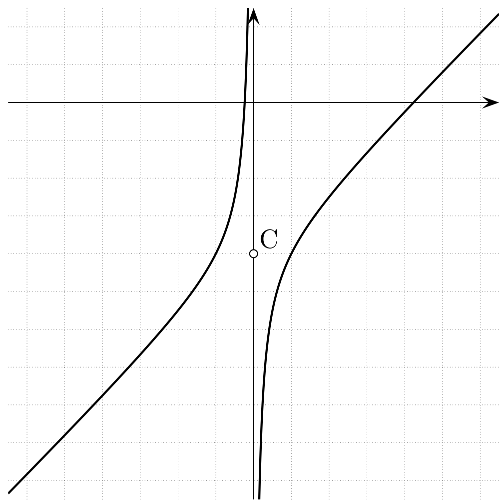


7) $f(0-x) = f(-x) = -x - 4 - \dfrac{1}{-x} = -x - 4 + \dfrac{1}{x}$

$f(0+x) = f(x) = x - 4 - \dfrac{1}{x}$

$f(0-x) + f(0+x) = -x - 4 + \dfrac{1}{x} + x - 4 - \dfrac{1}{x} = -8 = 2 \cdot (-4)$

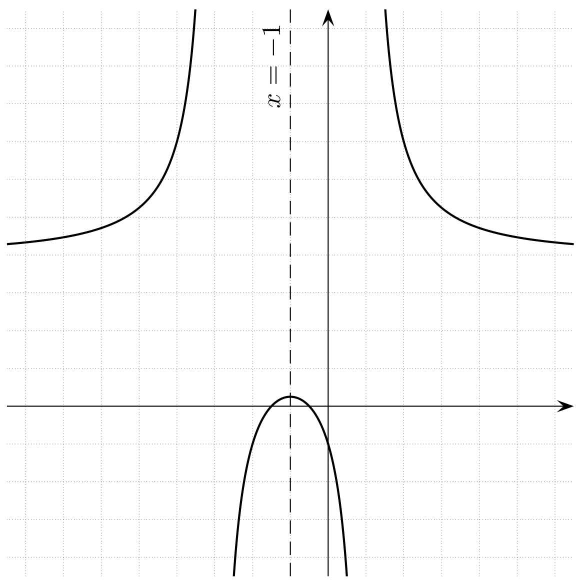
On en déduit que le point C$(0\,;-4)$ constitue un centre de symétrie du graphe de la fonction f.



8) $$f(-1-x) = \frac{4\,(-1-x)^2+8\,(-1-x)+3}{(-1-x)^2+2\,(-1-x)-3} = \frac{4+8\,x+4\,x^2-8-8\,x+3}{1+2\,x+x^2-2-2\,x-3} = \frac{4\,x^2-1}{x^2-4}$$

$$f(-1+x) = \frac{4\,(-1+x)^2+8\,(-1+x)+3}{(-1+x)^2+2\,(-1+x)-3} = \frac{4-8\,x+4\,x^2-8+8\,x+3}{1-2\,x+x^2-2+2\,x-3} = \frac{4\,x^2-1}{x^2-4}$$

Puisque $f(-1-x) = f(-1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut que le graphe de la fonction f admet $x = -1$ comme axe de symétrie.

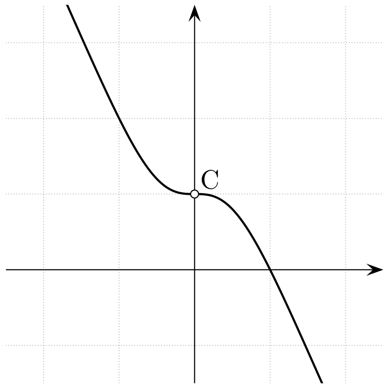


9) $$f(0-x) = f(-x) = 1 - \frac{2\,(-x)^3}{(-x)^2+1} = 1 + \frac{2\,x^3}{x^2+1}$$

$$f(0+x) = f(x) = 1 - \frac{2\,x^3}{x^2+1}$$

$$f(0-x)+f(0+x)=1+\frac{2\,x^3}{x^2+1}+1-\frac{2\,x^3}{x^2+1}=2=2\cdot 1$$

Cette dernière égalité montre que le point C$(0\,;1)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction f.



10) $$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-(2-x)-1}{(2-x)-2}=\frac{4-4\,x+x^2-2+x-1}{-x}$$
$$=\frac{-x^2+3\,x-1}{x}$$
$$f(2+x)=\frac{(2+x)^2-(2+x)-1}{(2+x)-2}=\frac{4+4\,x+x^2-2-x-1}{x}$$
$$=\frac{x^2+3\,x+1}{x}$$
$$f(2-x)+f(2+x)=\frac{-x^2+3\,x-1}{x}+\frac{x^2+3\,x+1}{x}=\frac{6\,x}{x}=6=2\cdot 3$$

On déduit de ces calculs que le graphe de la fonction f admet le point C$(2\,;3)$ comme centre de symétrie.