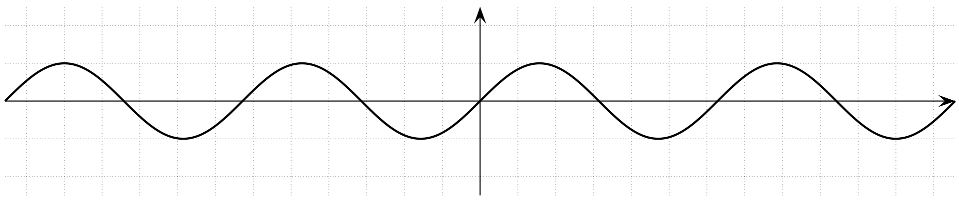
8 Fonctions trigonométriques

Rappel

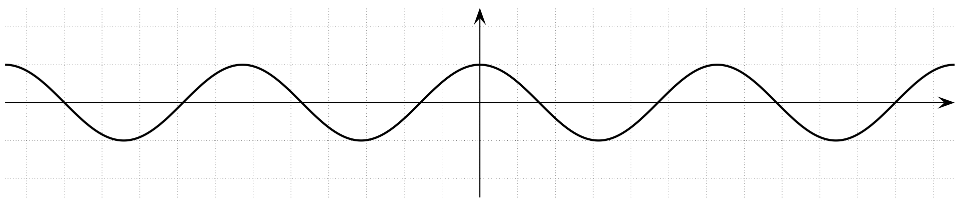
Voici le graphe de la fonction sinus :



On rappelle quelques propriétés de la fonction sinus démontrées aux exercices 1.6 et 1.9 :

1) elle est définie sur l'ensemble des nombres réels et à valeurs dans $[-1\,;1]$;
2) elle est impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3) elle est périodique de période $2\,\pi$: $\sin(x+2\,\pi) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Passons au graphe de la fonction cosinus :



Les propriétés suivantes de la fonction cosinus ont aussi été démontrées :

1) elle est définie sur l'ensemble des nombres réels et à valeurs dans $[-1\,;1]$;
2) elle est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3) elle est périodique de période $2\,\pi$: $\cos(x+2\,\pi) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les relations $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ et $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ impliquent que les graphes des fonctions sinus et cosinus s'obtiennent l'un à partir de l'autre par une translation de $\frac{\pi}{2}$ dans la direction de l'axe des abscisses.

8.1 Fonction tangente

On rappelle que la fonction tangente est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction tangente ?
2) Étudier la parité de la fonction tangente.
3) Vérifier que la fonction tangente est périodique de période π.
4) Quelles sont les asymptotes verticales de la fonction tangente ?
5) Représenter soigneusement le graphe de la fonction tangente.

8.2 **Fonction cotangente**

On rappelle que la fonction cotangente est définie par $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction cotangente ?
2) Étudier la parité de la fonction cotangente.
3) Vérifier que la fonction cotangente est périodique de période π.
4) Quelles sont les asymptotes verticales de la fonction cotangente ?
5) Représenter soigneusement le graphe de la fonction cotangente.

8.3 Déterminer la parité et la période des fonctions suivantes :

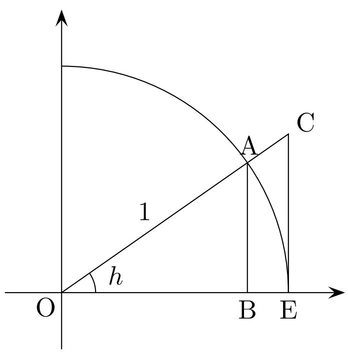
1) $f(x) = \sin(2\,x)$
2) $f(x) = \sin(2\,x + 3)$
3) $f(x) = \cos(3\,x)$
4) $f(x) = \cos(3\,x + 5)$
5) $f(x) = \cos(\frac{x}{5})$
6) $f(x) = \tan(\frac{x}{2})$
7) $f(x) = \sin(2\,x) + \sin(x)$
8) $f(x) = \sin(x)\,\cos(x)$
9) $f(x) = \sin^2(x)$
10) $f(x) = \sin^3(x)$
11) $f(x) = \cos^2(x)$
12) $f(x) = \cos^3(x)$

8.4 Déterminer les zéros et le signe de chaque fonction sur l'intervalle $[0\,;p[$, où p désigne la période de la fonction.

1) $f(x) = \sin\big(3\,x + \frac{\pi}{4}\big)$
2) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
3) $f(x) = \sin(x)\,\cos(x)$
4) $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x) - 1$
5) $f(x) = \dfrac{4\,\cos^2(x) - 1}{\cos(x)}$
6) $f(x) = 3\,\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\,\tan(x) + 3$

8.5

1) En fonction de $h \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, calculer :
   (a) l'aire du triangle OAB ;
   (b) l'aire du secteur OAE ;
   (c) l'aire du triangle OCE.
2) En déduire que $\cos(h)\,\sin(h) < h < \dfrac{\sin(h)}{\cos(h)}$,
   puis que $\dfrac{1}{\cos(h)} > \dfrac{\sin(h)}{h} > \cos(h)$.
3) En tirer que $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.
4) Conclure, vu la parité de la fonction sinus, que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.



8.6 Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$.

Indication pour lever l'indétermination : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} \cdot \frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}$.

8.7 Démontrer la formule $\boxed{\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)}$.

Rappels : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta)$

8.8 Démontrer la formule $\boxed{\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)}$.

Indication : $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

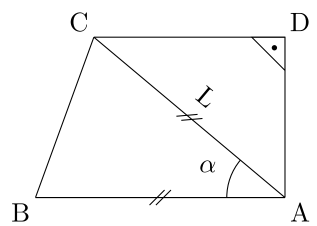
8.9 Démontrer la formule $\boxed{\big(\tan(x)\big)' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$.

8.10 Démontrer la formule $\boxed{\big(\cot(x)\big)' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)}$.

8.11 Calculer les dérivées première et deuxième des fonctions de l'exercice 8.4.

8.12 Démontrer que la fonction $f(x) = \sin^6(x) + \cos^6(x) + 3\,\sin^2(x)\,\cos^2(x)$ est constante.

8.13 Dans un trapèze ABCD, rectangle en D, la base AB et la diagonale AC ont une longueur L fixée. Déterminer pour quelle valeur de l'angle α l'aire du trapèze est maximale.
Quelle est l'aire maximale ?



8.14 Déterminer l'aire maximale d'un trapèze isocèle ABCD inscrit dans le demi-cercle de diamètre AB.

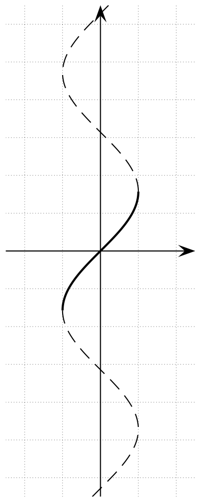
8.15 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\,\cos(x)$.

8.16 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \cos^3(x) - 3\,\cos(x) + 2$.

8.17 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 - \sin(x)}$.

8.18 Étudier selon le plan d'étude la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$.

Fonctions trigonométriques inverses

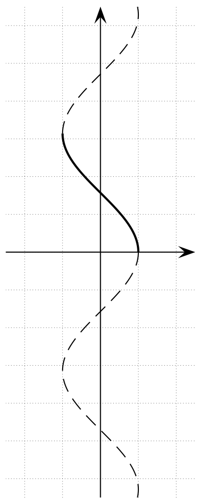


Définissons la fonction arc sinus, qui est la fonction inverse de la fonction sinus.

Construisons le symétrique, par rapport à la bissectrice du premier quadrant, du graphe de la fonction sinus.

La courbe ainsi obtenue ne définit pas une fonction, car pour une valeur de $x \in [-1\,;1]$, il existe plus d'une image.

Par contre, si pour $x \in [-1\,;1]$ nous choisissons uniquement des valeurs de y qui appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, nous obtenons une fonction que nous appelons arc sinus.
Pour $x \in [-1\,;1]$ et $y \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, on pose :
$y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$.



Définissons la fonction arc cosinus, qui est la fonction inverse de la fonction cosinus.

Construisons le symétrique, par rapport à la bissectrice du premier quadrant, du graphe de la fonction cosinus.

La courbe ainsi obtenue ne définit pas une fonction, car pour une valeur de $x \in [-1\,;1]$, il existe plus d'une image.

Par contre, si pour $x \in [-1\,;1]$ nous choisissons uniquement des valeurs de y qui appartiennent à $[0\,;\pi]$, nous obtenons une fonction que nous appelons arc cosinus.
Pour $x \in [-1\,;1]$ et $y \in [0\,;\pi]$, on pose :
$y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$.

8.19 Définir de même les fonctions arc tangente et arc cotangente.

8.20 1) En dérivant l'égalité $\sin\big(\arcsin(x)\big) = x$, montrer que
$\big(\arcsin(x)\big)' = \dfrac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)}$.

2) Justifier que si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$.

3) En déduire la formule $\boxed{\big(\arcsin(x)\big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

8.21 1) En dérivant l'égalité $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$, montrer que $\big(\arccos(x)\big)' = -\dfrac{1}{\sin\big(\arccos(x)\big)}$.

2) Justifier que si $\alpha \in [0\,;\pi]$, alors $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$.

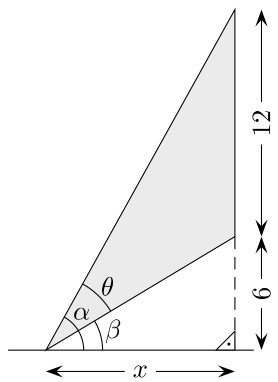
3) En déduire la formule $\boxed{\big(\arccos(x)\big)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

8.22 Démontrer la formule $\boxed{\big(\arctan(x)\big)' = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

8.23 Démontrer la formule $\boxed{\big(\text{arccot}(x)\big)' = -\dfrac{1}{1+x^2}}$.

8.24 Le bas d'un écran de cinéma de 12 mètres de haut arrive à 6 mètres au-dessus des yeux d'une spectatrice.

1) Exprimer α et β en fonction de x.
2) Exprimer θ en fonction de x.
3) Si l'on obtient la meilleure vision lorsque l'ouverture d'angle θ rapportée à l'écran est maximale, à quelle distance x du bas de l'écran la spectatrice doit-elle se trouver pour avoir la meilleure vision ?

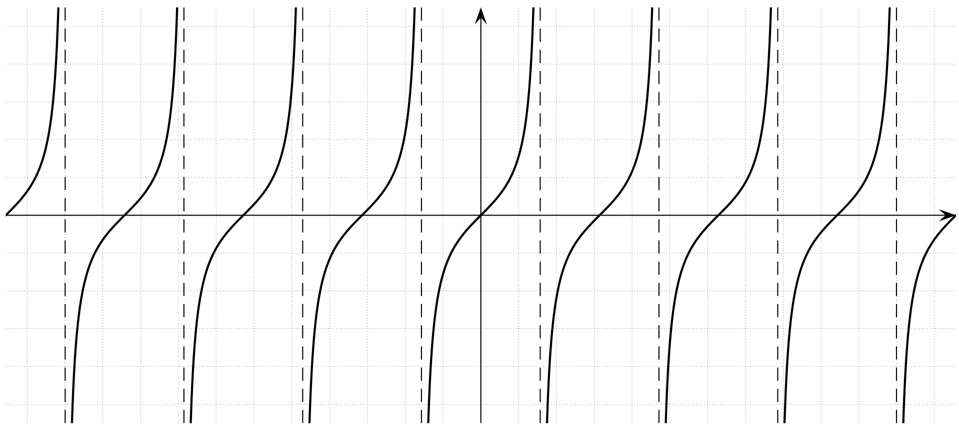


Réponses

8.1 1) $D_{\tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ 2) la fonction tangente est impaire

4) asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

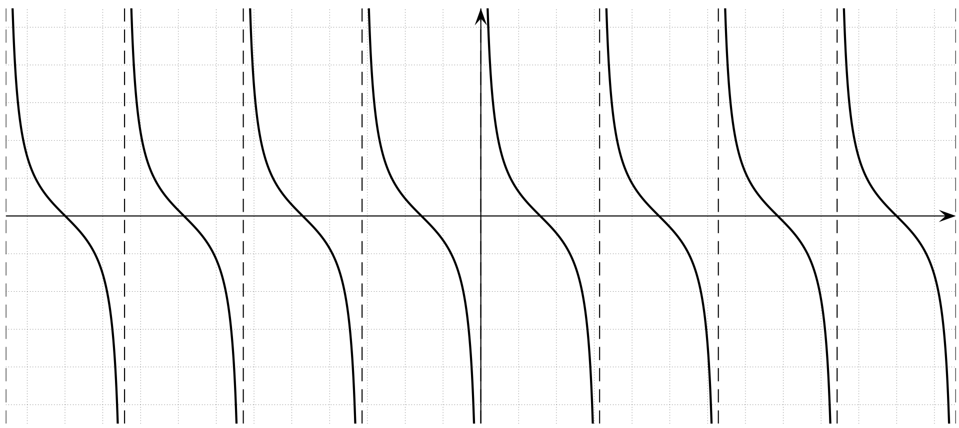
5)



8.2 1) $\mathrm{D}_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ 2) la fonction cotangente est impaire

4) asymptotes verticales $x = k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

5)



8.3

1)	impaire	période : π	2)	quelconque	période : π
3)	paire	période : $\frac{2\pi}{3}$	4)	quelconque	période : $\frac{2\pi}{3}$
5)	paire	période : $10\,\pi$	6)	impaire	période : $2\,\pi$
7)	impaire	période : $2\,\pi$	8)	impaire	période : π
9)	paire	période : π	10)	impaire	période : $2\,\pi$
11)	paire	période : π	12)	paire	période : $2\,\pi$

8.4

1)

0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{2\pi}{3}$
[	$+$	0	$-$	0	$+$	[

2)

0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
[	$+$	0	$-$	0	$+$	[

3)

0		$\frac{\pi}{2}$		π
0	$+$	0	$-$	[

4)

0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
0	$+$	0	$-$	0	$+$	[

5)

0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
[	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	[

6)

0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
[	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	[

8.11 1) $f'(x) = 3\,\cos\!\left(3\,x + \frac{\pi}{4}\right)$ $f''(x) = -9\,\sin\!\left(3\,x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) $f'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$ $\qquad f''(x) = -\cos(x) - \sin(x)$

3) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad f''(x) = -4\,\sin(x)\,\cos(x)$

4) $f'(x) = -\sin(x) + 2\,\sin(x)\,\cos(x)$ $\qquad f''(x) = -\cos(x) + 2\,\cos^2(x) - 2\,\sin^2(x)$

5) $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)\,\big(4\,\cos^2(x)+1\big)}{\cos^2(x)}$ $\qquad f''(x) = -\dfrac{2\,\sin^2(x) + 4\,\cos^4(x) + \cos^2(x)}{\cos^3(x)}$

6) $f'(x) = \big(6\,\tan(x) - 4\,\sqrt{3}\big)\,\big(1+\tan^2(x)\big)$

$f''(x) = 2\,\big(9\,\tan^2(x) - 4\,\sqrt{3}\,\tan(x) + 3\big)\,\big(\tan^2(x)+1\big)$

8.13 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ aire maximale : $\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{L}^2}{8}$

8.14 $\frac{3\sqrt{3}}{16}\,(\mathrm{AB})^2$

8.15 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ f n'est ni paire ni impaire $\quad p = 2\,\pi$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\,\sin(x)$

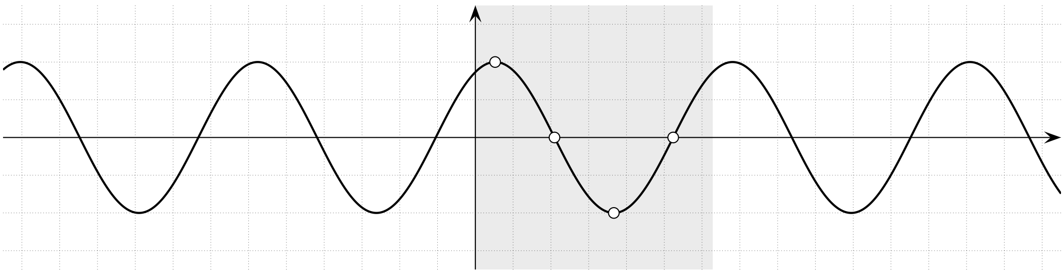
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(\frac{\pi}{6}\,;2)$ maximum $\qquad$ $(\frac{7\pi}{6}\,;-2)$ minimum

$f''(x) = -\sin(x) - \sqrt{3}\,\cos(x)$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(\frac{2\pi}{3}\,;0)$ et $(\frac{5\pi}{3}\,;0)$ points d'inflexion



8.16 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ f paire $\quad p = 2\,\pi$

x	0		2π
f	0	$+$	

$f'(x) = 3\,\sin^3(x)$

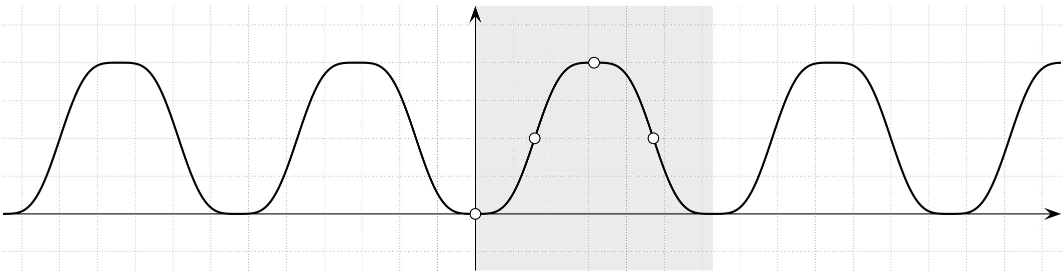
x	0		π		2π
f'	0	$+$	0	$-$	

$(0\,;0)$ minimum $\qquad$ $(\pi\,;4)$ maximum

$f''(x) = 9\,\sin^2(x)\,\cos(x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f''		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

$(\frac{\pi}{2}\,;2)$ et $(\frac{3\pi}{2}\,;2)$ points d'inflexion



8.17 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad f$ n'est ni paire ni impaire $\quad p = 2\,\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$2\,\pi$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f'(x) = \frac{1 - 2\,\sin(x)}{\big(2 - \sin(x)\big)^2}$$

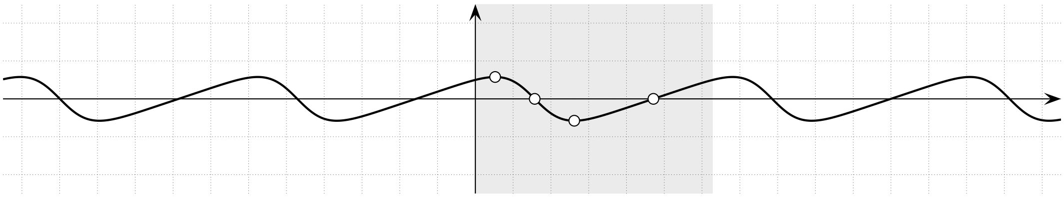
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\,\pi}{6}$		$2\,\pi$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(\frac{\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{3})$ maximum $\qquad (\frac{5\,\pi}{6}\,;-\frac{\sqrt{3}}{3})$ minimum

$$f''(x) = \frac{-2\,\cos(x)\,\big(\sin(x)+1\big)}{\big(2 - \sin(x)\big)^3}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$2\,\pi$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

$(\frac{\pi}{2}\,;0)$ et $(\frac{3\pi}{2}\,;0)$ points d'inflexion



8.18 $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{3\pi}{4} + k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad f$ n'est ni paire ni impaire $\quad p = \pi$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$x = \frac{3\pi}{4} + k\,\pi$ asymptote verticale pour tout $k \in \mathbb{Z}$

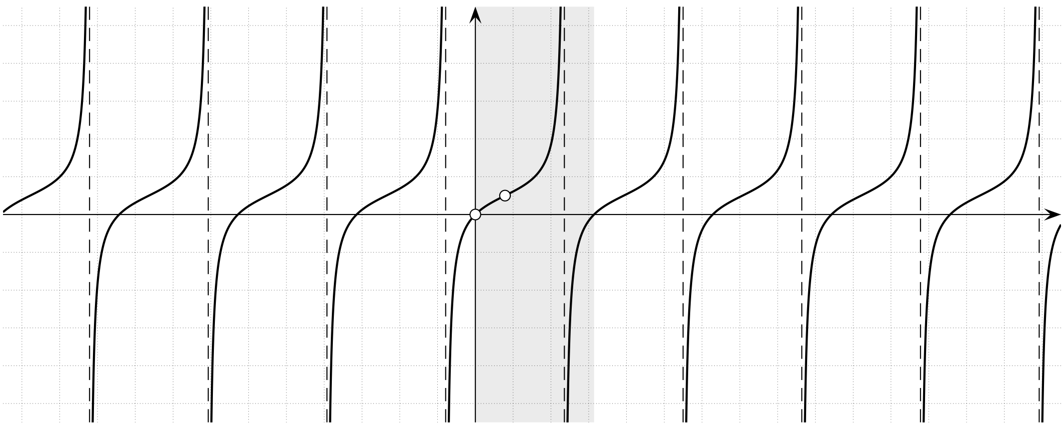
$$f'(x) = \frac{1}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2}$$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'		$+$	$\Vert$	$+$	

$$f''(x) = \frac{-2\,\big(\cos(x) - \sin(x)\big)}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^3}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$(\frac{\pi}{4}\,;\frac{1}{2})$ point d'inflexion



8.19 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]0\,;\pi\right[$, on pose $y = \operatorname{arccot}(x) \iff x = \cot(y)$.

8.24 1) $\alpha = \arctan(\frac{18}{x}) \quad \beta = \arctan(\frac{6}{x})$ $\qquad$ 2) $\theta = \arctan(\frac{18}{x}) - \arctan(\frac{6}{x})$

3) $6\,\sqrt{3} \approx 10{,}39$ m