8.15 1) Clairement $D_f = \mathbb{R}$.

2) (a) $f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$f(\frac{-\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\,\cos(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

Comme $f(-\frac{\pi}{6}) \neq f(\frac{\pi}{6})$, la fonction f n'est pas paire.
Vu que $f(-\frac{\pi}{6}) \neq -f(\frac{\pi}{6})$, la fonction f n'est pas impaire.

(b) $f(x+2\,\pi) = \sin(x+2\,\pi)+\sqrt{3}\,\cos(x+2\,\pi) = \sin(x)+\sqrt{3}\,\cos(x) = f(x)$
Par conséquent, la fonction f admet pour période $2\,\pi$.

3) Posons $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.
Vu la relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre le système $\begin{cases} b + \sqrt{3}\,a = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$.
La première équation donne $b = -\sqrt{3}\,a$ que l'on remplace dans la seconde : $a^2 + (-\sqrt{3}\,a)^2 = a^2 + 3\,a^2 = 4\,a^2 = 1$.

(a) $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donnent $x = \frac{5\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $a_2 = -\frac{1}{2}$ et $b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ impliquent $x = \frac{2\pi}{3} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f	[	$+$	0	$-$	0	$+$	[

4) Comme $D_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Vu la périodicité de la fonction, il n'y a ni asymptote horizontale ni asymptote oblique.

5) $f'(x) = \big(\sin(x) + \sqrt{3}\,\cos(x)\big)' = \cos(x) - \sqrt{3}\,\sin(x)$

Pour résoudre $f'(x) = 0$, on pose $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.
$\begin{cases} a - \sqrt{3}\,b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$
La première équation délivre $a = \sqrt{3}\,b$ que l'on remplace dans la seconde : $(\sqrt{3}\,b)^2 + b^2 = 3\,b^2 + b^2 = 4\,b^2 = 1$.

(a) $b_1 = \frac{1}{2}$ et $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entraînent $x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $b_2 = -\frac{1}{2}$ et $a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ impliquent $x = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
Le point $(\frac{\pi}{6}\,;2)$ est un maximum.

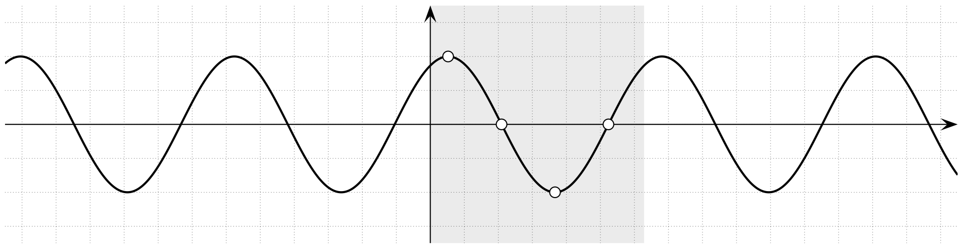
$f(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\frac{7\pi}{6}) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$
Le point $(\frac{7\pi}{6}\,;-2)$ est un minimum.

6) $f''(x) = \big(\cos(x) - \sqrt{3}\,\sin(x)\big)' = -\sin(x) - \sqrt{3}\,\cos(x)$
$= -\big(\sin(x) + \sqrt{3}\,\cos(x)\big) = -f(x)$

	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	infl	$\smile$	infl	$\frown$	

Les zéros $(\frac{2\pi}{3}\,;0)$ et $(\frac{5\pi}{3}\,;0)$ sont aussi des points d'inflexion.

7)



8) $f(\frac{\pi}{6} + x) = \sin(\frac{\pi}{6} + x) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{\pi}{6} + x)$
$= \sin(\frac{\pi}{6})\,\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{6})\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\cos(\frac{\pi}{6})\,\cos(x) - \sin(\frac{\pi}{6})\,\sin(x)\big)$
$= \frac{1}{2}\,\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(x) - \frac{1}{2}\,\sin(x)\big)$
$= \frac{1}{2}\,\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) + \frac{3}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x)$
$= 2\,\cos(x)$

$f(\frac{\pi}{6} - x) = \sin(\frac{\pi}{6} - x) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{\pi}{6} - x)$
$= \sin(\frac{\pi}{6})\,\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{6})\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\cos(\frac{\pi}{6})\,\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{6})\,\sin(x)\big)$
$= \frac{1}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(x) + \frac{1}{2}\,\sin(x)\big)$
$= \frac{1}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) + \frac{3}{2}\,\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x)$
$= 2\,\cos(x)$

Puisque $f(\frac{\pi}{6}+x) = f(\frac{\pi}{6}-x)$, le graphe de f admet $x = \frac{\pi}{6}+2\,k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ pour axes de symétrie.

$f(\frac{7\pi}{6} + x) = \sin(\frac{7\pi}{6} + x) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{7\pi}{6} + x)$
$= \sin(\frac{7\pi}{6})\,\cos(x) + \cos(\frac{7\pi}{6})\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\cos(\frac{7\pi}{6})\,\cos(x) - \sin(\frac{7\pi}{6})\,\sin(x)\big)$
$= -\frac{1}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(x) - (-\frac{1}{2})\,\sin(x)\big)$
$= -\frac{1}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) - \frac{3}{2}\,\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x)$
$= -2\,\cos(x)$

$f(\frac{7\pi}{6} - x) = \sin(\frac{7\pi}{6} - x) + \sqrt{3}\,\cos(\frac{7\pi}{6} - x)$
$= \sin(\frac{7\pi}{6})\,\cos(x) - \cos(\frac{7\pi}{6})\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(\cos(\frac{7\pi}{6})\,\cos(x) + \sin(\frac{7\pi}{6})\,\sin(x)\big)$
$= -\frac{1}{2}\,\cos(x) - (-\frac{\sqrt{3}}{2})\,\sin(x) + \sqrt{3}\,\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(x) + (-\frac{1}{2})\,\sin(x)\big)$
$= -\frac{1}{2}\,\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x) - \frac{3}{2}\,\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(x)$
$= -2\,\cos(x)$

Attendu que $f(\frac{7\pi}{6} + x) = f(\frac{7\pi}{6} - x)$, le graphe de f admet $x = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ pour axes de symétrie.