**8.16** 1) Manifestement $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) (a) $f(-x) = \cos^3(-x) - 3\,\cos(-x) + 2 = \cos^3(x) - 3\,\cos(x) + 2 = f(x)$

On constate ainsi que la fonction $f$ est paire.

(b) $$\begin{aligned} f(x + 2\,\pi) &= \cos^3(x + 2\,\pi) - 3\,\cos(x + 2\,\pi) + 2 \\ &= \cos^3(x) - 3\,\cos(x) + 2 = f(x) \end{aligned}$$

La fonction $f$ admet donc pour période $2\,\pi$.

3) Posons $g(y) = y^3 - 3\,y + 2$.

On remarque que $g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

À l'aide du schéma de Horner $\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & \| \; 0 \end{array}$

on obtient $$\begin{aligned} y^3 - 3\,y + 2 &= (y-1)\,(y^2 + y - 2) \\ &= (y-1)\,(y-1)\,(y+2) = (y-1)^2\,(y+2)\,. \end{aligned}$$

Dès lors $f(x) = \cos^3(x) - 3\,\cos(x) + 2 = \big(\cos(x) - 1\big)^2\,\big(\cos(x) + 2\big)$.

(a) $\cos(x) = 1$ donne $x = 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $\cos(x) = -2$ est impossible, car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & & 2\,\pi \\ \hline f & 0 & + & \end{array}$$

4) Comme $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Vu la périodicité de la fonction, il n'y a ni asymptote horizontale ni asymptote oblique.

5) $$\begin{aligned} f'(x) &= \big(\cos^3(x) - 3\,\cos(x) + 2\big) \\ &= 3\,\cos^2(x)\,\cos'(x) - 3\,\big(-\sin(x)\big) \\ &= -3\,\cos^2(x)\,\sin(x) + 3\,\sin(x) \\ &= 3\,\sin(x)\,\big(-\cos^2(x) + 1\big) \\ &= 3\,\sin(x)\,\sin^2(x) \\ &= 3\,\sin^3(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & & \pi & & 2\,\pi \\ \hline f' & 0 & + & 0 & - & 0 \\ f & \text{min} & \nearrow & \text{max} & \searrow & \text{min} \end{array}$$

$f(0) = \cos^3(0) - 3\,\cos(0) + 2 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

Le point $(0\,;0)$ est un minimum.

$f(\pi) = \cos^3(\pi) - 3\,\cos(\pi) + 2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$

Le point $(\pi\,;4)$ est un maximum.

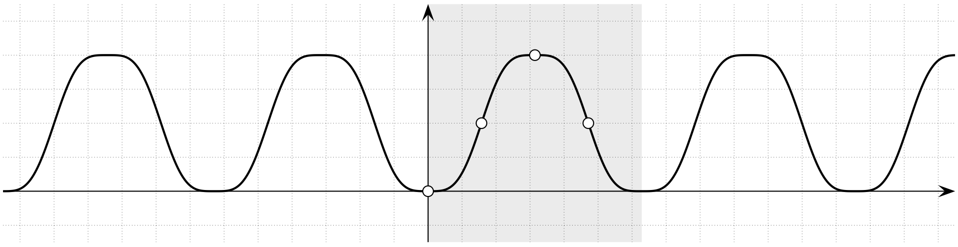
6) $f''(x) = \big(3\,\sin^3(x)\big)' = 3 \cdot 3\,\sin^2(x)\,\sin'(x) = 9\,\sin^2(x)\,\cos(x)$

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi & & \frac{3\pi}{2} & & 2\pi \\
f'' & 0 & + & 0 & - & 0 & - & 0 & + & 0 \\
f & & \smile & \text{infl} & \frown & & \frown & \text{infl} & \smile &
\end{array}$$

$f(\frac{\pi}{2}) = \cos^3(\frac{\pi}{2}) - 3\,\cos(\frac{\pi}{2}) + 2 = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$f(\frac{3\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2} - 2\,\pi) = f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 2$

Les points $(\frac{\pi}{2}\,;2)$ et $(\frac{3\pi}{2}\,;2)$ sont des points d'inflexion.

7) 

8) $$\begin{aligned} f(\pi + x) &= \cos^3(\pi + x) - 3\,\cos(\pi + x) + 2 \\ &= \big(-\cos(x)\big)^3 - 3\,\big(-\cos(x)\big) + 2 \\ &= -\cos^3(x) + 3\,\cos(x) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \cos^3(\pi - x) - 3\,\cos(\pi - x) + 2 \\ &= \big(-\cos(x)\big)^3 - 3\,\big(-\cos(x)\big) + 2 \\ &= -\cos^3(x) + 3\,\cos(x) + 2 \end{aligned}$$

Puisque $f(\pi+x) = f(\pi-x)$, le graphe de $f$ admet $x = \pi + 2\,k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ pour axes de symétrie.