8.17 1) $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

$1 \geqslant -\sin(x) \geqslant -1$

$3 \geqslant 2 - \sin(x) \geqslant 1$

Ainsi le dénominateur ne s'annule jamais, de sorte que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

2) (a) $f(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{6})}{2 - \sin(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\cos(-\frac{\pi}{6})}{2 - \sin(-\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - (-\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire, car $f(-\frac{\pi}{6}) \neq f(\frac{\pi}{6})$ et $f(-\frac{\pi}{6}) \neq -f(\frac{\pi}{6})$.

(b) $f(x + 2\,\pi) = \dfrac{\cos(x + 2\,\pi)}{2 - \sin(x + 2\,\pi)} = \dfrac{\cos(x)}{2 - \sin(x)} = f(x)$

Par conséquent la fonction f est périodique de période $2\,\pi$.

3) Puisque le dénominateur est toujours strictement positif, le signe de f est le même que celui de $\cos(x)$:

0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$2\,\pi$	
[	$+$	0	$-$	0	$+$	[	f

4) Comme $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Vu la périodicité de la fonction, il n'y a ni asymptote horizontale ni asymptote oblique.

5) $$f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{2 - \sin(x)}\right)' = \frac{\cos'(x)\,\big(2 - \sin(x)\big) - \cos(x)\,\big(2 - \sin(x)\big)'}{\big(2 - \sin(x)\big)^2}$$

$$= \frac{-\sin(x)\,\big(2 - \sin(x)\big) - \cos(x)\,\big(-\cos(x)\big)}{\big(2 - \sin(x)\big)^2}$$

$$= \frac{-2\,\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x)}{\big(2 - \sin(x)\big)^2} = \frac{1 - 2\,\sin(x)}{\big(2 - \sin(x)\big)^2}$$

$1 - 2\,\sin(x) = 0$ donne $\sin(x) = \frac{1}{2}$, d'où l'on déduit :

(a) $x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $x = \frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\,\pi}{6}$		$2\,\pi$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$f(\frac{\pi}{6}) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{6})}{2 - \sin(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Le point $(\frac{\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{3})$ est un maximum.

$$f(\tfrac{5\,\pi}{6}) = \frac{\cos(\frac{5\,\pi}{6})}{2-\sin(\frac{5\,\pi}{6})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Le point $(\frac{5\,\pi}{6}\,;-\frac{\sqrt{3}}{3})$ est un minimum.

6) $$f''(x) = \left(\frac{1-2\,\sin(x)}{\big(2-\sin(x)\big)^2}\right)'$$

$$= \frac{\big(1-2\,\sin(x)\big)'\,\big(2-\sin(x)\big)^2 - \big(1-2\,\sin(x)\big)\,\Big(\big(2-\sin(x)\big)^2\Big)'}{\Big(\big(2-\sin(x)\big)^2\Big)^2}$$

$$= \frac{-2\,\cos(x)\,\big(2-\sin(x)\big)^2 - \big(1-2\,\sin(x)\big)\,2\,\big(2-\sin(x)\big)\,\big(2-\sin(x)\big)'}{(\big(2-\sin(x)\big)^4}$$

$$= \frac{-2\,\cos(x)\,\big(2-\sin(x)\big)^2 - \big(1-2\,\sin(x)\big)\,2\,\big(2-\sin(x)\big)\,\big(-\cos(x)\big)}{(\big(2-\sin(x)\big)^4}$$

$$= \frac{-2\,\cos(x)\,\big(2-\sin(x)\big)\,\Big(\big(2-\sin(x)\big)-\big(1-2\,\sin(x)\big)\Big)}{(\big(2-\sin(x)\big)^4}$$

$$= \frac{-2\,\cos(x)\,\big(2-\sin(x)\big)\,\big(\sin(x)+1\big)}{\big(2-\sin(x)\big)^4}$$

$$= \frac{-2\,\cos(x)\,\big(\sin(x)+1\big)}{\big(2-\sin(x)\big)^3}$$

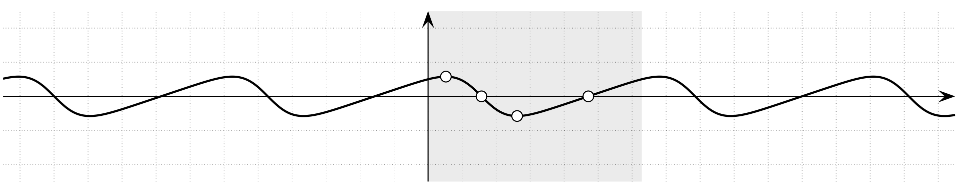
(a) $\cos(x) = 0$ implique $x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ ou $x = \frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $\sin(x) = -1$ donne $x = \frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$2\,\pi$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	infl	$\smile$	infl	$\frown$	

Les zéros $(\frac{\pi}{2}\,;0)$ et $\frac{3\,\pi}{2}\,;0)$ sont aussi des points d'inflexion.

7)



8) $f(\frac{\pi}{2}+x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{2-\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = \dfrac{-\sin(x)}{2-\cos(x)}$

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{2-\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$

$f(\frac{\pi}{2}+x)+f(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{-\sin(x)}{2-\cos(x)} + \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)} = 0 = 2\cdot 0$

montre que le point $(\frac{\pi}{2}\,;0)$ constitue un centre de symétrie du graphe de f.

$$\begin{aligned} f(\tfrac{3\pi}{2}+x) &= \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{2-\sin(\frac{3\pi}{2}+x)} = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2})\,\cos(x)-\sin(\frac{3\pi}{2})\,\sin(x)}{2-\big(\sin(\frac{3\pi}{2})\,\cos(x)+\cos(\frac{3\pi}{2})\,\sin(x)\big)} \\ &= \frac{0\cdot\cos(x)-(-1)\cdot\sin(x)}{2-\big(-1\cdot\cos(x)+0\cdot\sin(x)\big)} = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\tfrac{3\pi}{2}-x) &= \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}-x)}{2-\sin(\frac{3\pi}{2}-x)} = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2})\,\cos(x)+\sin(\frac{3\pi}{2})\,\sin(x)}{2-\big(\sin(\frac{3\pi}{2})\,\cos(x)-\cos(\frac{3\pi}{2})\,\sin(x)\big)} \\ &= \frac{0\cdot\cos(x)+(-1)\cdot\sin(x)}{2-\big(-1\cdot\cos(x)-0\cdot\sin(x)\big)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} \end{aligned}$$

$f(\frac{3\pi}{2}+x)+f(\frac{3\pi}{2}-x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)} + \dfrac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = 0 = 2\cdot 0$

signifie que le point $(\frac{3\pi}{2}\,;0)$ est un centre de symétrie du graphe de f.