8.18 1) Pour résoudre $\cos(x) + \sin(x) = 0$, posons $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$ et résolvons le système $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$.

La première équation donne $b = -a$ que l'on substitue dans la seconde : $a^2 + (-a)^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2 = 1$

(a) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_1 = -a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent $x = \frac{7\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(b) $a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_2 = -a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ impliquent $x = \frac{3\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

En résumé $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{3\pi}{4} + k\,\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2) (a) D_f n'est pas symétrique, car $\frac{\pi}{4} \in \mathrm{D}_f$, mais $-\frac{\pi}{4} \notin \mathrm{D}_f$.
C'est pourquoi la fonction f n'est ni paire ni impaire.

(b)
$$f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi) + \sin(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x) - \sin(x)} = \frac{-\sin(x)}{-\big(\cos(x) + \sin(x)\big)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = f(x)$$

Par conséquent, la fonction f est périodique de période π.

3)

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f	[0	$+$	‖	$-$	[

4)
$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} = \frac{\sin(\frac{3\pi}{4})}{\cos(\frac{3\pi}{4}) + \sin(\frac{3\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0} = \infty$$

Ainsi f admet pour asymptotes verticales $x = \frac{3\pi}{4} + k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Vu la périodicité de la fonction f, elle ne possède ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique.

5)
$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\right)'$$
$$= \frac{\sin'(x)\,\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - \sin(x)\,\big(\cos(x) + \sin(x)\big)'}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2}$$
$$= \frac{\cos(x)\,\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - \sin(x)\,\big(-\sin(x) + \cos(x)\big)}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \cos(x)\,\sin(x) + \sin^2(x) - \cos(x)\,\sin(x)}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2} = \frac{1}{\big(\cos(x) + \sin(x)\big)^2}$$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

6) $f''(x) = \left(\dfrac{1}{\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^2}\right)' = -\dfrac{\Big(\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^2\Big)'}{\Big(\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^2\Big)^2}$

$$= -\frac{2\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big)\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big)'}{\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^4}$$

$$= -\frac{2\,\big(\cos(x)+\sin(x)\big)'}{\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^3} = -\frac{2\,\big(-\sin(x)+\cos(x)\big)}{\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^3}$$

$$= \frac{-2\,\big(\cos(x)-\sin(x)\big)}{\big(\cos(x)+\sin(x)\big)^3}$$

Pour résoudre $\cos(x)-\sin(x)=0$, on pose $a=\cos(x)$ et $b=\sin(x)$ et on résout le système $\begin{cases} a-b=0 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$.

La première équation donne $b=a$ que l'on remplace dans la seconde : $a^2+a^2=2\,a^2=1$.

(a) $a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ délivrent $x=\frac{\pi}{4}+2\,k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

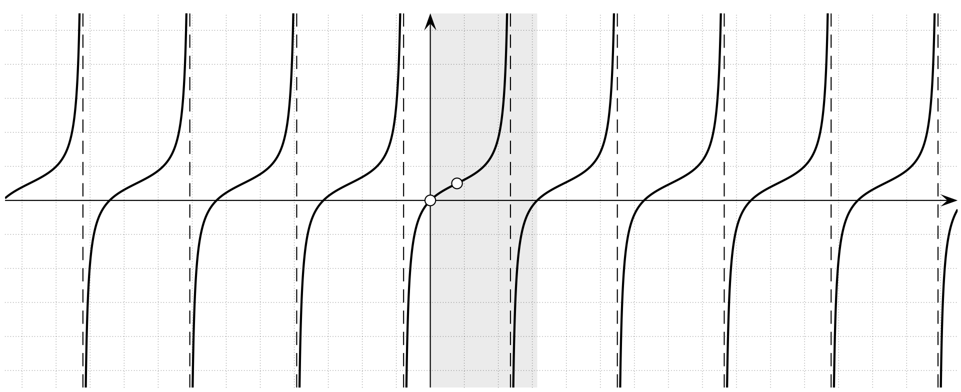
(b) $a_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent $x=\frac{5\pi}{4}+2\,k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
f		$\frown$	infl	$\smile$	$\Vert$	$\frown$	

$f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{\pi}{4})} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$

Le point $(\frac{\pi}{4}\,;\frac{1}{2})$ est donc un point d'inflexion.

7)



8) $$f(\tfrac{\pi}{4}+x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)+\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$$
$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)+\cos(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)}{\cos(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)-\sin(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)+\sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)+\cos(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(x)+\sin(x)\big)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)}$$
$$= \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2\,\cos(x)}$$

$$f(\tfrac{\pi}{4}-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\sin(\frac{\pi}{4}-x)}$$
$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)}{\cos(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)+\sin(\frac{\pi}{4})\,\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{4})\,\sin(x)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin(x)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(x)-\sin(x)\big)}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(x)}$$
$$= \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2\,\cos(x)}$$

On constate que

$$f(\tfrac{\pi}{4}+x)+f(\tfrac{\pi}{4}-x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2\,\cos(x)}+\frac{\cos(x)-\sin(x)}{2\,\cos(x)}$$
$$= \frac{2\,\cos(x)}{2\,\cos(x)} = 1 = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,.$$

Ce calcul montre que le graphe de f admet le point $(\frac{\pi}{4}\,;\frac{1}{2})$ pour centre de symétrie.