8.3 1) (a) $f(-x) = \sin\big(2\,(-x)\big) = \sin(-2\,x) = -\sin(2\,x) = -f(x)$

La fonction f est par conséquent impaire.

(b) $f(x+\pi) = \sin\big(2\,(x+\pi)\big) = \sin(2\,x + 2\,\pi) = \sin(2\,x) = f(x)$

La fonction f admet donc pour période π.

2) (a) $f(1) = \sin(2 \cdot 1 + 3) = \sin(5) \approx -0{,}959$

$f(-1) = \sin\big(2 \cdot (-1) + 3\big) = \sin(1) \approx 0{,}841$

La fonction f n'est ainsi ni paire ni impaire, car $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.

(b) $f(x+\pi) = \sin\big(2\,(x+\pi)+3\big) = \sin(2\,x+2\,\pi+3) = \sin(2\,x+3+2\,\pi)$
$= \sin(2\,x+3) = f(x)$

C'est pourquoi la fonction f admet pour période π.

3) (a) $f(-x) = \cos\big(3\,(-x)\big) = \cos(-3\,x) = \cos(3\,x) = f(x)$

Par conséquent, la fonction f est paire.

(b) $f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos\big(3\,(x + \frac{2\pi}{3})\big) = \cos(3\,x + 2\,\pi) = \cos(3\,x) = f(x)$

Il apparaît ainsi que la fonction f a pour période $\frac{2\pi}{3}$.

4) (a) $f(1) = \cos(3 \cdot 1 + 5) = \cos(8) \approx -0{,}146$

$f(-1) = \cos\big(3 \cdot (-1) + 5\big) = \cos(2) \approx -0{,}416$

Puisque $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

(b) $f(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos\big(3\,(x+\frac{2\pi}{3})+5\big) = \cos(3\,x+2\,\pi+5) = \cos(3\,x+5+2\,\pi)$
$= \cos(3\,x+5) = f(x)$

Cela signifie que la fonction f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

5) (a) $f(-x) = \cos(\frac{-x}{5}) = \cos(-\frac{x}{5}) = \cos(\frac{x}{5}) = f(x)$

La fonction f est par conséquent paire.

(b) $f(x + 10\,\pi) = \cos(\frac{x+10\,\pi}{5}) = \cos(\frac{x}{5} + \frac{10\,\pi}{5}) = \cos(\frac{x}{5} + 2\,\pi)$
$= \cos(\frac{x}{5}) = f(x)$

C'est pourquoi la fonction f est périodique de période $10\,\pi$.

6) (a) $f(-x) = \tan(\frac{-x}{2}) = \tan(-\frac{x}{2}) = -\tan(\frac{x}{2}) = -f(x)$

On constate que la fonction f est impaire.

(b) $f(x+2\,\pi) = \tan(\frac{x+2\,\pi}{2}) = \tan(\frac{x}{2} + \frac{2\,\pi}{2}) = \tan(\frac{x}{2} + \pi) = \tan(\frac{x}{2}) = f(x)$

On remarque donc que la fonction f a pour période $2\,\pi$.

7) (a) $f(-x) = \sin\big(2\,(-x)\big) + \sin(-x) = \sin(-2\,x) + \sin(-x)$
$= -\sin(2\,x) - \sin(x) = -\big(\sin(2\,x) + \sin(x)\big) = -f(x)$

Par conséquent la fonction f est impaire.

(b) $f(x + 2\,\pi) = \sin\big(2\,(x + 2\,\pi)\big) + \sin(x + 2\,\pi) = \sin(2\,x + 2 \cdot 2\,\pi) + \sin(x + 2\,\pi)$
$= \sin(2\,x) + \sin(x) = f(x)$

On en déduit que la fonction f est périodique de période $2\,\pi$.

8) (a) $f(-x) = \sin(-x)\,\cos(-x) = -\sin(x)\,\cos(x) = -f(x)$

Voilà qui montre que la fonction f est impaire.

(b) $f(x + \pi) = \sin(x + \pi)\,\cos(x + \pi) = -\sin(x)\,\big(-\cos(x)\big)$
$= \sin(x)\,\cos(x) = f(x)$

La période de la fonction f vaut donc π.

9) (a) $f(-x) = \sin^2(-x) = \big(\sin(-x)\big)^2 = \big(-\sin(x)\big)^2 = \big(\sin(x)\big)^2$
$= \sin^2(x) = f(x)$

La fonction f est par conséquent paire.

(b) $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = \big(\sin(x + \pi)\big)^2 = \big(-\sin(x)\big)^2 = \big(\sin(x)\big)^2$
$= \sin^2(x) = f(x)$

La fonction f est ainsi périodique de période π.

10) (a) $f(-x) = \sin^3(-x) = \big(\sin(-x)\big)^3 = \big(-\sin(x)\big)^3 = -\big(\sin(x)\big)^3$
$= -\sin^3(x) = -f(x)$

On en tire que la fonction f est impaire.

(b) $f(x + 2\,\pi) = \sin^3(x + 2\,\pi) = \big(\sin(x + 2\,\pi)\big)^3 = \big(\sin(x)\big)^3$
$= \sin^3(x) = f(x)$

La fonction f admet ainsi pour période $2\,\pi$.

11) (a) $f(-x) = \cos^2(-x) = \big(\cos(-x)\big)^2 = \big(\cos(x)\big)^2 = \cos^2(x) = f(x)$

La fonction f est donc paire.

(b) $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = \big(\cos(x + \pi)\big)^2 = \big(-\cos(x)\big)^2 = \big(\cos(x)\big)^2$
$= \cos^2(x) = f(x)$

Il en résulte que la fonction f est périodique de période π.

12) (a) $f(-x) = \cos^3(-x) = \big(\cos(-x)\big)^3 = \big(\cos(x)\big)^3 = \cos^3(x) = f(x)$

Voilà qui montre que la fonction f est paire.

(b) $f(x + 2\,\pi) = \cos^3(x + 2\,\pi) = \big(\cos(x + 2\,\pi)\big)^3 = \big(\cos(x)\big)^3$
$= \cos^3(x) = f(x)$

Par conséquent la fonction f a pour période $2\,\pi$.