

- 8.4** 1) (a)  $f(x + \frac{2\pi}{3}) = \sin(3(x + \frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{4}) = \sin(3x + 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = f(x)$   
 Ainsi la fonction  $f$  a pour période  $\frac{2\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = 0 &\implies \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \\ &\begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\text{0} \quad + \quad \frac{\pi}{4} \quad - \quad \frac{7\pi}{12} \quad + \quad \frac{2\pi}{3} \quad [ \end{aligned}$$

- 2) (a)  $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = \cos(x) + \sin(x) = f(x)$   
 La fonction  $f$  admet donc pour période  $2\pi$ .

(b) Posons  $a = \cos(x)$  et  $b = \sin(x)$ .

Au vu de la formule  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ , résoudre  $f(x) = 0$  revient à résoudre le système  $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

La première équation donne  $b = -a$  que l'on substitue dans la seconde :  $a^2 + (-a)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 1$ .

Donc  $a^2 = \frac{1}{2}$ , d'où les deux possibilités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{i. } a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\begin{cases} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ii. } a_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\begin{cases} \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$0 \quad + \quad \frac{3\pi}{4} \quad - \quad \frac{7\pi}{4} \quad + \quad 2\pi \quad [$$

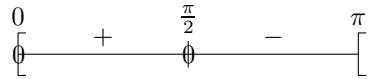
- 3) (a)  $f(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) = -\sin(x)(-\cos(x)) = \sin(x)\cos(x) = f(x)$

La période de la fonction  $f$  vaut donc  $\pi$ .

(b)  $f(x) = \sin(x)\cos(x)$  s'annule si

$$\text{i. } \sin(x) = 0, \text{ d'où } x = k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

ii.  $\cos(x) = 0$ , c'est-à-dire  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$



4) (a)  $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \sin^2(x+2\pi) - 1 = \cos(x) + \sin^2(x) - 1 = f(x)$

Il en résulte que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .

- (b) La relation fondamentale  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  implique :  
 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ .

Ainsi  $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x) - 1 = 0$  équivaut à  
 $\cos(x) + (1 - \cos^2(x)) - 1 = \cos(x) - \cos^2(x) = \cos(x)(1 - \cos(x)) = 0$ .

i.  $\cos(x) = 0$  donne  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

ii.  $1 - \cos(x) = 0$ , c'est-à-dire  $\cos(x) = 1$  délivre  $x = 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$



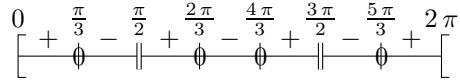
5) (a)  $f(x+2\pi) = \frac{4 \cos^2(x+2\pi) - 1}{\cos(x+2\pi)} = \frac{4 \cos^2(x) - 1}{\cos(x)} = f(x)$

- (b)  $4 \cos^2(x) - 1 = (2 \cos(x) - 1)(2 \cos(x) + 1) = 0$  implique

i.  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  donne  $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

ii.  $\cos(x) = -\frac{1}{2}$  délivre  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x) = 0$  implique  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$



6) (a)  $f(x+\pi) = 3 \tan^2(x+\pi) - 4\sqrt{3} \tan(x+\pi) + 3$   
 $= 3 \tan^2(x) - 4\sqrt{3} \tan(x) + 3 = f(x)$

Ainsi  $f$  admet pour période  $\pi$ .

(b)  $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

i.  $\tan(x) = \frac{-(-4\sqrt{3})+2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \sqrt{3}$  donne  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

ii.  $\tan(x) = \frac{-(-4\sqrt{3})-2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  délivre  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

