8.4 1) (a) $f(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin\big(3\,(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{\pi}{4}\big) = \sin(3\,x+2\,\pi+\frac{\pi}{4} = \sin(3\,x+\frac{\pi}{4}) = f(x)$

Ainsi la fonction f a pour période $\frac{2\pi}{3}$.

(b) $\sin(3\,x+\frac{\pi}{4}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 3\,x+\frac{\pi}{4} = 2\,k\,\pi & \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ 3\,x+\frac{\pi}{4} = \pi+2\,k\,\pi & \text{où } k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 3\,x = -\frac{\pi}{4}+2\,k\,\pi & \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ 3\,x = \frac{3\pi}{4}+2\,k\,\pi & \text{où } k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12}+\frac{2\,k\,\pi}{3} & \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4}+\frac{2\,k\,\pi}{3} & \text{où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12}+\frac{2\,k\,\pi}{3} & \text{où } k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4}+\frac{2\,k\,\pi}{3} & \text{où } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{2\pi}{3}$
[	+	0	−	0	+	[

2) (a) $f(x+2\,\pi) = \cos(x+2\,\pi)+\sin(x+2\,\pi) = \cos(x)+\sin(x) = f(x)$

La fonction f admet donc pour période $2\,\pi$.

(b) Posons $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.

Au vu de la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre le système $\begin{cases} a+b = 0 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$

La première équation donne $b = -a$ que l'on substitue dans la seconde : $a^2+(-a)^2 = a^2+a^2 = 2\,a^2 = 1$.

Donc $a^2 = \frac{1}{2}$, d'où les deux possibilités suivantes :

i. $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{7\pi}{4}+2\,k\,\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

ii. $a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{3\pi}{4}+2\,k\,\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		$2\,\pi$
[	+	0	−	0	+	[

3) (a) $f(x+\pi) = \sin(x+\pi)\,\cos(x+\pi) = -\sin(x)\,\big(-\cos(x)\big)$
$\qquad = \sin(x)\,\cos(x) = f(x)$

La période de la fonction f vaut donc π.

(b) $f(x) = \sin(x)\,\cos(x)$ s'annule si

i. $\sin(x) = 0$, d'où $x = k\,\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

ii. $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
	0	$+$	0	$-$	

4) (a) $f(x+2\,\pi) = \cos(x+2\,\pi)+\sin^2(x+2\,\pi)-1 = \cos(x)+\sin^2(x)-1 = f(x)$

Il en résulte que f est périodique de période $2\,\pi$.

(b) La relation fondamentale $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ implique :
$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi $f(x) = \cos(x) + \sin^2(x) - 1 = 0$ équivaut à
$\cos(x)+\big(1-\cos^2(x)\big)-1 = \cos(x)-\cos^2(x) = \cos(x)\,\big(1-\cos(x)\big) = 0$.

i. $\cos(x) = 0$ donne $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

ii. $1-\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos(x) = 1$ délivre $x = 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$2\,\pi$
	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5) (a) $f(x + 2\,\pi) = \dfrac{4\,\cos^2(x + 2\,\pi) - 1}{\cos(x + 2\,\pi)} = \dfrac{4\,\cos^2(x) - 1}{\cos(x)} = f(x)$

(b) $4\,\cos^2(x) - 1 = \big(2\,\cos(x) - 1\big)\,\big(2\,\cos(x) + 1\big) = 0$ implique

i. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ donne $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

ii. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ délivre $x = \pm\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x) = 0$ implique $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\,\pi}{3}$		$\frac{4\,\pi}{3}$		$\frac{3\,\pi}{2}$		$\frac{5\,\pi}{3}$		$2\,\pi$
		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

6) (a) $f(x + \pi) = 3\,\tan^2(x + \pi) - 4\,\sqrt{3}\,\tan(x + \pi) + 3$
$ = 3\,\tan^2(x) - 4\,\sqrt{3}\,\tan(x) + 3 = f(x)$

Ainsi f admet pour période π.

(b) $\Delta = (-4\,\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 12 = (2\,\sqrt{3})^2$

i. $\tan(x) = \frac{-(-4\,\sqrt{3})+2\,\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \sqrt{3}$ donne $x = \frac{\pi}{3} + k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

ii. $\tan(x) = \frac{-(-4\,\sqrt{3})-2\,\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ délivre $x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \quad$ où $k \in \mathbb{Z}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	