**8.5**

1) (a) aire du triangle OAB :

$\frac{1}{2}\,\text{OB}\cdot\text{OA} = \frac{1}{2}\big(1\cdot\cos(h)\big)\,\big(1\cdot\sin(h)\big) = \frac{1}{2}\,\cos(h)\,\sin(h)$

(b) aire du secteur OAE :

$\pi\cdot 1^2\cdot\frac{h}{2\,\pi} = \frac{1}{2}\,h$

(c) aire du triangle OCE :

$\frac{1}{2}\,\text{OE}\cdot\text{CE} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan(h) = \frac{1}{2}\,\tan(h) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(h)}{\cos(h)}$

2) aire du triangle OAB $<$ aire du secteur OAE $<$ aire du triangle OCE

$\frac{1}{2}\,\cos(h)\,\sin(h) < \frac{1}{2}\,h < \frac{1}{2}\,\frac{\sin(h)}{\cos(h)}$

$\cos(h)\,\sin(h) < h < \frac{\sin(h)}{\cos(h)}$

Comme $h \in\, ]0\,;\frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(h) > 0$.

Donc, après division par $\sin(h)$, il en résulte les inégalités suivantes :

$\cos(h) < \frac{h}{\sin(h)} < \frac{1}{\cos(h)}$

$\frac{1}{\cos(h)} > \frac{\sin(h)}{h} > \cos(h)$

3) Par passage à la limite, on obtient :

$1 = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\cos(h)} \geqslant \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin(h)}{h} \geqslant \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \cos(h) = 1$

Grâce au théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

4) $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\sin(h)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin(-h)}{-h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\sin(h)}{-h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

Puisque les limites à gauche et à droite coïncident, on conclut finalement que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.