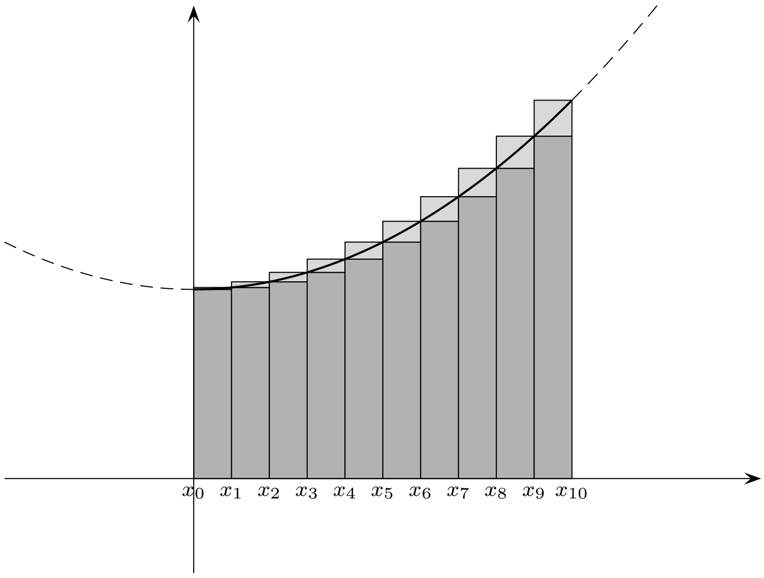
11 Intégrales

11.1 Le but de cet exercice est de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 1$, et le graphe de la fonction $f(x) = x^2+1$.

Pour approximer cette aire, on subdivise l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ et on pose $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_i = \frac{i}{n}, \ldots, x_n = 1$.

Sur chaque intervalle $[x_i\,; x_{i+1}]$ (où $0 \leqslant i \leqslant n-1$) de la subdivision, on construit les rectangles r_i et R_i de hauteurs respectives $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

On note $a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,dx_i$ et $\mathrm{A}_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,dx_i$ les sommes respectives des aires des rectangles r_i et R_i, avec $dx_i = x_{i+1} - x_i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$.



1) Vérifier que lorsque $n = 10$, on obtient $\frac{1285}{1000} = a_{10} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathrm{A}_{10} = \frac{1385}{1000}$.

2) On rappelle le résultat $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$.

   Établir des formules générales pour calculer a_n et A_n.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Intégrales définies

On considère un intervalle $[a\,;b]$ que l'on partage en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$ et on pose $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}, \ldots, x_n = b$.

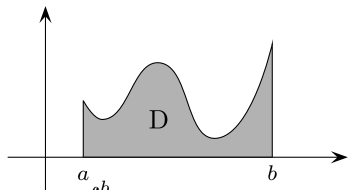
On appelle **intégrale définie** d'une fonction f entre a et b $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,dx_i$

où $dx_i = x_{i+1} - x_i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$; on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

On dit que x est la **variable d'intégration** et que les nombres a et b sont les **bornes d'intégration**.

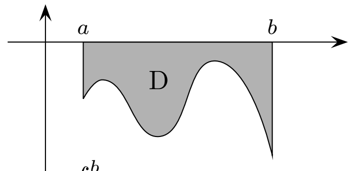
Interprétation géométrique

1) Si f est continue et positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les verticales $x = a$ et $x = b$, et le graphe de f.



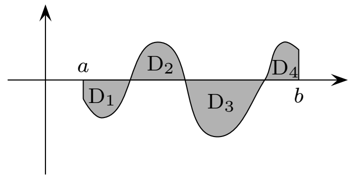
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire(D)}$$

2) Si f est continue et négative sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'opposé de l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les verticales $x = a$ et $x = b$, et le graphe de f.



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{aire(D)}$$

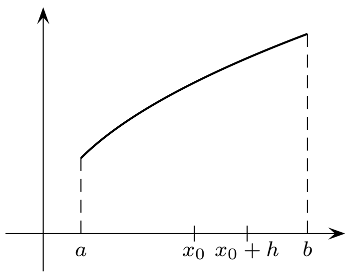
3) Si f est continue et change de signe sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente la somme des aires **algébriques** (ou orientées) des domaines situés entre l'axe des abscisses, les verticales $x = a$ et $x = b$, et le graphe de f.



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{aire}(D_1) + \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D_3) + \text{aire}(D_4)$$

11.2 Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;b]$.
À tout réel x_0 de $[a\,;b]$, on associe l'aire $\mathcal{A}(x_0)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, les verticales $x = a$ et $x = x_0$, et le graphe de la fonction f.

1) Soit $h > 0$.

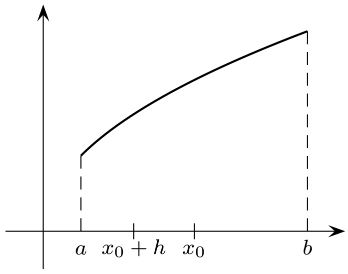


(a) Hachurer sur le graphique ci-contre le domaine dont l'aire est : $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$.

(b) En s'inspirant de la méthode de l'exercice 11.1, encadrer, à l'aide de la fonction f, $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$.

(c) Grâce au théorème des gendarmes, calculer $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$.

2) Soit $h < 0$.



(a) Hachurer sur le graphique ci-contre le domaine dont l'aire est : $\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)$.

(b) Procéder de même pour encadrer $\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)$ et calculer $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h}$.

3) Il en résulte que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et que $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

En d'autres termes, la fonction $\mathcal{A}$ est une primitive de la fonction f.
Soit F une primitive de la fonction f.
(a) Justifier qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}(x) = \mathrm{F}(x) + c$.
(b) Que vaut $\mathcal{A}(a)$?
(c) En déduire que $\mathcal{A}(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.
(d) En particulier, que vaut l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, les verticales $x = a$ et $x = b$, et le graphe de la fonction f ?

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive quelconque de f sur cet intervalle. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Exemple Nous pouvons à présent facilement résoudre l'exercice 11.1 :
$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \tfrac{1}{3}\,x^3 + x\Big|_0^1 = (\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + 1) - (\tfrac{1}{3}\cdot 0^3 + 0) = \tfrac{4}{3}$$

11.3 1) Étudier le signe et esquisser le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 2\,x$.
2) Calculer l'aire *algébrique* du domaine compris entre l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 3$ et le graphe de f.
3) Calculer l'aire *géométrique* du domaine compris entre l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 3$ et le graphe de f.

11.4 1) Calculer l'aire *algébrique* du domaine compris entre l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 2\,\pi$ et le graphe de $f(x) = \sin(x)$.
2) Calculer l'aire *géométrique* du domaine compris entre l'axe des abscisses, les verticales $x = 0$ et $x = 2\,\pi$ et le graphe de $f(x) = \sin(x)$.

11.5 Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre l'axe Ox et le graphe de la fonction f.
1) $f(x) = -3\,x^2 + 2\,x + 5$ 2) $f(x) = 2\,x^2 - x^3 - x^4$
3) $f(x) = 6\,x + x^2 - x^3$

11.6 Calculer l'aire géométrique du domaine délimité par les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

11.7 Soient $f(x) = x^2 - 3\,x + 2$ et $g(x) = -x^2 - x + 6$. Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre les graphes de f et de g.

11.8 Calculer l'aire du domaine compris entre la cubique $y = x^3 + 2\,x^2 + x$ et la parabole d'axe parallèle à Oy, donnée par trois de ses points A$(-2\,;-2)$, B$(-\frac{3}{2}\,;0)$, C$(0\,;0)$.

11.9 Soients $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$ et $g(x) = |x|$.
Calculer l'aire de $\big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\big\}$.

11.10 Déterminer l'aire de la région délimitée par l'axe des abscisses et les courbes d'équation $y = -x$ et $y = \sqrt{2-x}$.

11.11 À l'aide de l'exercice 10.16 6), prouver que l'aire d'un disque de rayon r centré à l'origine vaut $\pi\,r^2$.

11.12 On considère le domaine borné du premier quadrant limité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $y = 8$ et la courbe d'équation $y = \frac{4-x^2}{x^2}$. Déterminer la valeur de b pour laquelle la droite d'équation $y = b$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

11.13 Soient $f(x) = x + e^{-x}$ et $g(x) = x$.

1) Calculer l'aire $\mathcal{A}_k$ de $\big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0\,;k] \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$ où $k > 0$.
2) Calculer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathcal{A}_k$.

Intégrales généralisées ou impropres

1) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b[$, mais non définie ou non continue en b. Si $\displaystyle\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx}\,.$$

Sinon, on dit que l'**intégrale diverge**.

2) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a\,;b]$, mais non définie ou non continue en a. Si $\displaystyle\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \int_t^b f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \int_t^b f(x)\,dx}\,.$$

Sinon, on dit que l'**intégrale diverge**.

3) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$. Si $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx}\,.$$

Sinon, on dit que l'**intégrale diverge**.

4) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty\,;b]$. Si $\lim\limits_{t\to-\infty}\displaystyle\int_t^b f(x)\,dx$ existe et est finie, alors on définit

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx}\,.$$

Sinon, on dit que l'**intégrale diverge**.

5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ne divergent pas, alors on définit

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx}\,.$$

11.14 Calculer, si elles existent, les intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x}\,dx$

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{x^3}}\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$

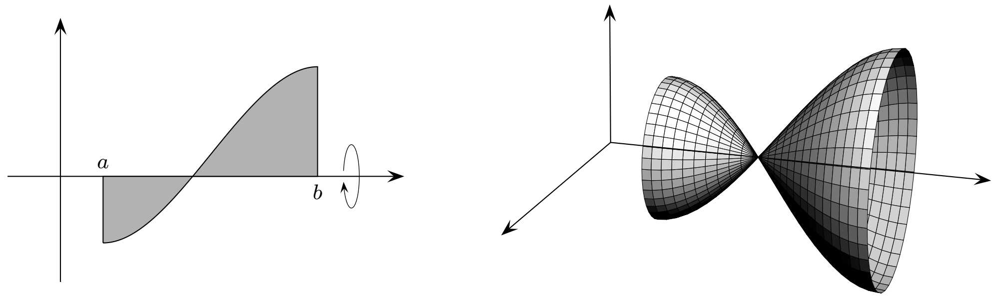
12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

11.15 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$. Calculer l'aire du domaine « limité » par le graphe de f et par l'axe des x entre -1 et 0 .

Volume d'un corps de révolution

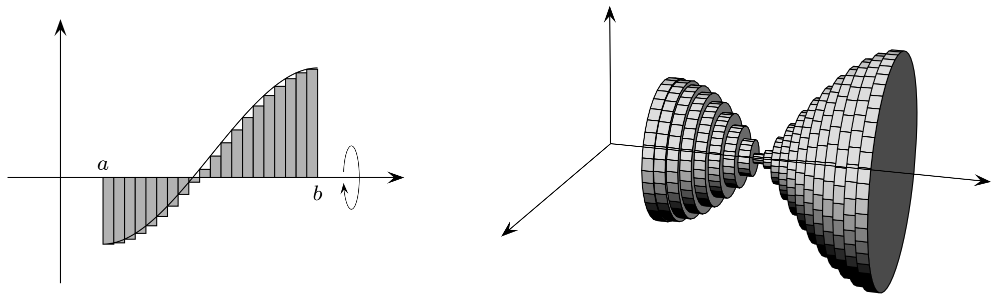
Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et D le domaine borné limité par le graphe de f et par les verticales $x = a$ et $x = b$.

On veut calculer le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de l'axe des abscisses.



L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire délimitée par le graphe d'une fonction. On subdivise l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$ et on pose $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}, \ldots, x_n = b$.

Pour chaque $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on considère le rectangle ayant comme base le segment $[x_i\,;x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.



Chacun de ces rectangles, lorsqu'il tourne autour de l'axe Ox, engendre un cylindre très fin de volume $\mathrm{V}_i = \pi\,\big(f(x_i)\big)^2\,dx_i$ où $dx_i = x_{i+1} - x_i$.

Finalement, par passage à la limite, on obtient :

$$\mathrm{V} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{V}_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\pi\,\big(f(x_i)\big)^2\,dx_i = \pi\,\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(x_i)\big)^2\,dx_i$$

c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{V} = \pi\displaystyle\int_a^b\big(f(x)\big)^2\,dx}$.

11.16 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 - x^4}$.

11.17 Soient les points A$(0\,;4)$ et B$(6\,;0)$. Calculer le volume engendré par la rotation du segment AB autour de l'axe des abscisses.

11.18 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du trapèze de sommets $(2\,;0)$, $(4\,;0)$, $(4\,;6)$ et $(2\,;2)$.

11.19 Prouver que le volume d'un cône circulaire droit de hauteur h et dont le rayon de la base est r est donné par $\frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$.

11.20 Prouver qu'une sphère de rayon r centrée à l'origine a pour volume $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$.

11.21 Soit $f : [0\,;\lambda] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
Calculer λ pour que le volume obtenu par rotation du graphe de f autour de l'axe des x soit égal à celui d'une sphère de rayon 1 .

11.22 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x}{4\,x^3 + 1}$.

1) Représenter graphiquement la fonction f pour x appartenant à $\mathbb{R}_+$.
2) Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses.

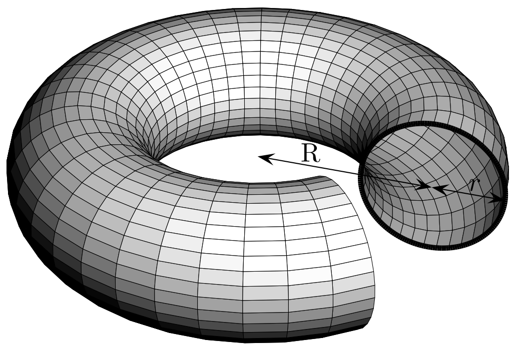
11.23 Soient $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\mathrm{D} = \big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1\,;e] \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$.

1) Calculer l'aire géométrique de D.
2) Calculer le volume engendré par la rotation de D autour de l'axe des x .

11.24 Soient A et B les points d'intersection de la courbe d'équation $8\,y = -x^2 + 16$ avec l'axe Ox.

1) Montrer que le triangle formé par l'axe Ox et les tangentes à la courbe en A et B est isocèle.
2) Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine limité par la courbe et ces tangentes.

11.25 Calculer le volume d'un tore avec trou : corps engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite contenue dans le plan du disque et située à une distance R du centre du disque ($r <$ R).



Réponses

11.1
2) $a_n = 1 + \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6\,n^3}$ $\qquad \mathrm{A}_n = 1 + \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6\,n^3}$
3) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{4}{3} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{4}{3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{A}_n$

11.3 2) 0 3) $\frac{8}{3}$

11.4 1) 0 2) 4

11.5 1) $\frac{256}{27}$ 2) $\frac{63}{20}$ 3) $\frac{253}{12}$

11.6 $\frac{1}{3}$

11.7 9

11.8 $y = -2\,x^2 - 3\,x$ et $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$

11.9 $\frac{4}{3}$

11.10 $\frac{10}{3}$

11.12 $b = 3$

11.13 1) $1 - \frac{1}{e^k}$ 2) 1

11.14 1) 2 2) diverge 3) diverge
4) $\frac{3}{2}$ 5) diverge 6) 1
7) diverge 8) diverge 9) $\frac{1}{2}$
10) 1 11) -1 12) π

11.15 $\frac{2}{3}$

11.16 $\frac{4\,\pi}{15}$

11.17 $32\,\pi$

11.18 $\frac{104\,\pi}{3}$

11.21 $\lambda = \sqrt{\frac{8}{3}}$

11.22 2) $\frac{\pi}{12}$

11.23 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\pi\,(2 - \frac{5}{e})$

11.24 2) $\frac{128\,\pi}{5}$

11.25 $2\,\pi^2\,\mathrm{R}\,r^2$