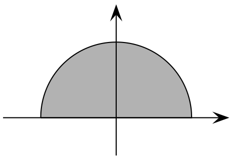
11.11 Le cercle centré à l'origine et de rayon r a pour équation $x^2+y^2=r^2$.
On en tire $y^2=r^2-x^2$, puis $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$.



Posons $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$.
f est définie si $0\leqslant r^2-x^2=(r+x)\,(r-x)$, c'est-à-dire si $-r\leqslant x\leqslant r$.

Par conséquent, l'aire du disque de rayon r centré à l'origine vaut :
$2\cdot\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

Effectuons le changement de variable $x=r\,\sin(t)$.

Cette formule donne $\sin(t)=\frac{x}{r}$, puis $t=\arcsin(\frac{x}{r})$.

Les bornes de l'intégrale deviennent donc :
$\arcsin(\frac{-r}{r})=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(\frac{r}{r})=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$.

$$2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-\big(r\,\sin(t)\big)^2}\,\big(r\,\sin(t)\big)'\,dt =$$

$$2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sqrt{r^2-r^2\,\sin^2(t)}}_{r\,\cos(t)}\cdot r\,\cos(t)\,dt = 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\,\cos^2(t)\,dt = 2\,r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt =$$

$$2\,r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2\,t)}{2}\,dt = 2\,r^2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1+\cos(2\,t)\big)\,dt =$$

$$r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1+\tfrac{1}{2}\,\cos(2\,t)\cdot 2\big)\,dt = r^2\cdot\left(t+\tfrac{1}{2}\,\sin(2\,t)\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$r^2\cdot\Big(\big(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\,\sin(2\cdot\tfrac{\pi}{2})\big)-\big(-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\,\sin(2\cdot(-\tfrac{\pi}{2}))\big)\Big) =$$

$$r^2\cdot\Big(\big(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\,\sin(\pi)\big)-\big(-\tfrac{\pi}{2}+\sin(-\pi)\big)\Big) = r^2\cdot\big((\tfrac{\pi}{2}+0)-(-\tfrac{\pi}{2}+0)\big) =$$

$$r^2\cdot\big(\tfrac{\pi}{2}-(-\tfrac{\pi}{2})\big) = r^2\cdot\pi = \pi\,r^2$$