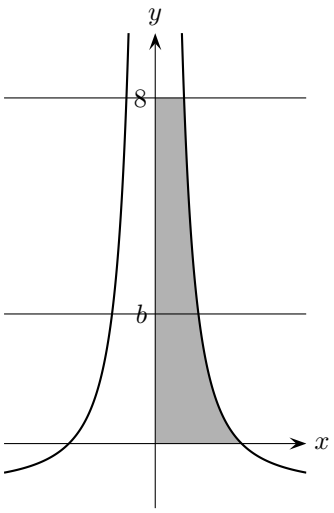
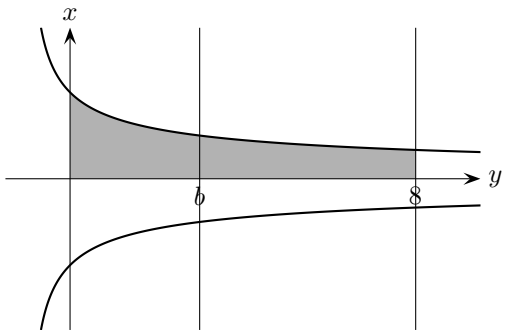
11.12 Le problème est bien plus simple si l'on intervertit les rôles de x et y, afin d'avoir des verticales au lieu d'horizontales.





Cela signifie qu'il faut exprimer y en fonction de x :
$y = \frac{4-x^2}{x^2}$
$x^2\, y = 4 - x^2$
$x^2\, y + x^2 = 4$
$x^2\,(y+1) = 4$
$x^2 = \frac{4}{y+1}$
$x = \pm\frac{2}{\sqrt{y+1}}$
Comme on se limite au premier quadrant, on a $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$.

Commençons par calculer l'entier de l'aire grisée :
$$\int_0^8 \frac{2}{\sqrt{y+1}}\,dy = 2\int_0^8 (y+1)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,(y+1)^{-\frac{1}{2}+1}\Big|_0^8 = 4\sqrt{y+1}\Big|_0^8 =$$
$4\sqrt{8+1} - 4\sqrt{0+1} = 8$

Nous pouvons à présent déterminer la valeur de b :
$$\tfrac{1}{2}\cdot 8 = \int_0^b \frac{2}{\sqrt{y+1}}\,dy = 4\sqrt{y+1}\Big|_0^b = 4\sqrt{b+1} - 4\sqrt{0+1} = 4\left(\sqrt{b+1}-1\right)$$
$4 = 4\left(\sqrt{b+1}-1\right)$
$1 = \sqrt{b+1} - 1$
$2 = \sqrt{b+1}$
$4 = b+1$
$3 = b$