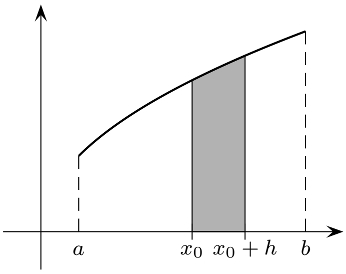
11.2 1) (a)



(b) Étant donné que la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$, on a :

$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0+h)$ pour tout $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$.

$f(x_0)\big((x_0+h)-x_0\big) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0) \leqslant f(x_0+h)\big((x_0+h)-x_0\big)$

$f(x_0)\cdot h \leqslant \mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0) \leqslant f(x_0+h)\cdot h$

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

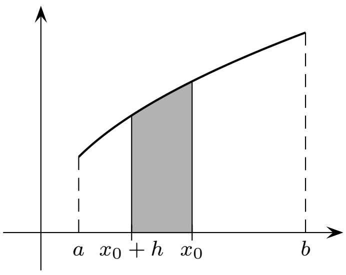
(c) Comme f est continue sur $[a\,;b]$, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0+h) = f(x_0)$.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0+h)$$

$$f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

2) (a)



(b) Étant donné que la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$, on a :

$f(x_0+h) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x_0+h \leqslant x \leqslant x_0$.

$f(x_0+h)\big(x_0-(x_0+h)\big) \leqslant \mathcal{A}(x_0)-\mathcal{A}(x_0+h) \leqslant f(x_0)\big(x_0-(x_0+h)\big)$

$f(x_0+h)\cdot(-h) \leqslant \mathcal{A}(x_0)-\mathcal{A}(x_0+h) \leqslant f(x_0)\cdot(-h)$

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0)-\mathcal{A}(x_0+h)}{-h} \leqslant f(x_0)$$

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Comme f est continue sur $[a\,;b]$, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x_0+h) = f(x_0)$.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x_0+h)$$

$$f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

On a donc obtenu $\mathcal{A}'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$.

3) (a) $\big(\mathcal{A}(x) - \mathrm{F}(x)\big)' = \mathcal{A}'(x) - \mathrm{F}'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Par conséquent, la fonction $\mathcal{A}(x) - \mathrm{F}(x)$ est constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}(x) - \mathrm{F}(x) = c$, c'est-à-dire $\mathcal{A}(x) = \mathrm{F}(x) + c$.

(b) $\mathcal{A}(a) = 0$

(c) $0 = \mathcal{A}(a) = \mathrm{F}(a) + c$ fournit $c = -\mathrm{F}(a)$.

Donc $\mathcal{A}(x) = \mathrm{F}(x) + c = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$.

(d) $\mathcal{A}(b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$