11.23 1) Étant donné que $\ln(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$, il suit que $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$.

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int_1^e \ln(x) \cdot \big(\ln(x)\big)'\,dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\ln^2(x)\,\Big|_1^e = \tfrac{1}{2}\ln^2(e) - \tfrac{1}{2}\ln^2(1) = \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2 = \tfrac{1}{2}$$

2) $\pi \displaystyle\int_1^e f^2(x)\,dx = \pi \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x^2}\,dx$

Calculons une primitive de $\dfrac{\ln^2(x)}{x^2}$ grâce à une intégration par parties :

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad f(x) = -\dfrac{1}{x}$

$g(x) = \ln^2(x) \qquad g'(x) = 2\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln^2(x)}{x} + \int \frac{2\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln^2(x)}{x} + 2\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

Calculons une primitive de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ à nouveau par intégration par parties :

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad f(x) = -\dfrac{1}{x}$

$g(x) = \ln(x) \qquad g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

En résumé, nous avons obtenu :

$$\pi \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x^2}\,dx = \pi\left(-\frac{\ln^2(x)}{x} + 2\left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e\right) =$$

$$\pi\left(-\frac{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 2}{x}\Big|_1^e\right) = \pi\left(-\tfrac{\ln^2(e)+2\ln(e)+2}{e} + \tfrac{\ln^2(1)+2\ln(1)+2}{1}\right) =$$

$$\pi\left(-\tfrac{1^2+2\cdot 1+2}{e} + \tfrac{0^2+2\cdot 0+2}{1}\right) = \pi\left(-\tfrac{5}{e} + 2\right) = \pi\left(2 - \tfrac{5}{e}\right)$$