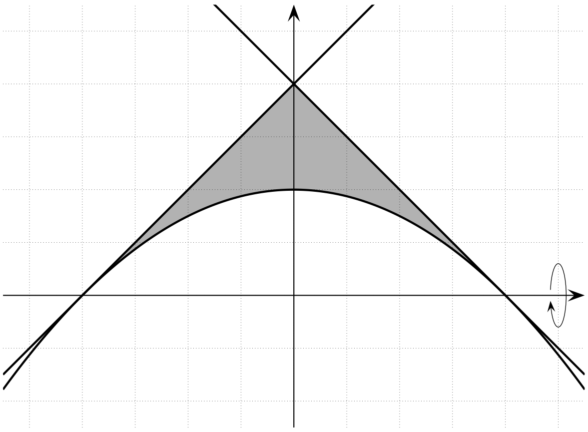
11.24 La parabole d'équation $8\,y = -x^2 + 16$ peut aussi s'écrire :
$y = \frac{1}{8}\,(16 - x^2) = \frac{1}{8}\,(4 + x)\,(4 - x)\,.$
On a donc A$(-4\,;0)$ et B$(4\,;0)$.



1) (a) **1^re^ méthode**

Posons $f(x) = \frac{1}{8}\,(-x^2 + 16)\,.$

L'équation de la tangente en A$(-4\,;0)$ est donnée par la formule :

$y = f'(-4)\,\big(x - (-4)\big) + f(-4)$

$f'(x) = \frac{1}{8}\,(-x^2 + 16)' = \frac{1}{8}\,(-2\,x) = -\frac{1}{4}\,x$

$f'(-4) = -\frac{1}{4} \cdot (-4) = 1$

$f(-4) = \frac{1}{8}\,\big((-4)^2 + 16\big) = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$

L'équation de la tangente en A est donc : $y = x + 4\,.$

De même, l'équation de la tangente en B$(4\,;0)$ est donnée par la formule :

$y = f'(4)\,(x - 4) + f(4)$

$f'(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1$

$f(4) = \frac{1}{8}\,(4^2 - 16) = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$

Ainsi l'équation de la tangente en B est : $y = -x + 4\,.$

Calculons le point d'intersection des tangentes :

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on trouve $2\,x = 0$, d'où suit $x = 0$, puis $y = 0 + 4 = 4\,.$

Les tangentes se coupent ainsi au point C$(0\,;4)\,.$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ 4 - 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = 4\,\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = 4\,\sqrt{1^2 + 1^2} = 4\,\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 4 - 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = 4\,\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = 4\,\sqrt{(-1)^2 + 1^2}$$

$= 4\sqrt{2}$

Vu que $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|$, le triangle ABC est isocèle en C.

(b) **2^e méthode**

La fonction $f(x) = \frac{1}{8}\,(-x^2+16)$ est paire :

$f(-x) = \frac{1}{8}\,\big(-(-x)^2+16\big) = \frac{1}{8}\,(-x^2+16) = f(x)$

L'axe Oy constitue ainsi un axe de symétrie.

En particulier, c'est un axe de symétrie du triangle ABC, qui est dès lors isocèle.

2) On rappelle que $f(x) = \frac{1}{8}\,(-x^2+16)\,.$

Posons $g(x) = -x+4\,.$

Vu la symétrie d'axe Oy, le volume recherché vaut :

$$2\,\pi \int_0^4 g^2(x)\,dx - 2\,\pi \int_0^4 f^2(x)\,dx = 2\,\pi\left(\int_0^4 g^2(x) - \int_0^4 f^2(x)\,dx\right) =$$

$$2\,\pi \int_0^4 \big(g^2(x)-f^2(x)\big)\,dx = 2\,\pi \int_0^4 \left(\big(-x+4\big)^2 - \big(\tfrac{1}{8}\,(-x^2+16)\big)^2\right)dx =$$

$$2\,\pi \int_0^4 \big(x^2-8\,x+16-\tfrac{1}{64}\,x^4+\tfrac{1}{2}\,x^2-4\big)\,dx =$$

$$2\,\pi \int_0^4 \big(-\tfrac{1}{64}\,x^4+\tfrac{3}{2}\,x^2-8\,x+12\big)\,dx = 2\,\pi\left(-\tfrac{1}{320}\,x^5+\tfrac{1}{2}\,x^3-4\,x^2+12\,x\,\Big|_0^4\right) =$$

$$2\,\pi\Big(\big(-\tfrac{1}{320}\cdot 4^5+\tfrac{1}{2}\cdot 4^3-4\cdot 4^2+12\cdot 4\big)-\big(-\tfrac{1}{320}\cdot 0^5+\tfrac{1}{2}\cdot 0^3-4\cdot 0^2+12\cdot 0\big)\Big) =$$

$$2\,\pi\Big(\big(-\tfrac{16}{5}+32-64+48\big)-\big(-0+0-0+0\big)\Big) = 2\,\pi\,\big(\tfrac{64}{5}-0\big) = \tfrac{128\,\pi}{5}$$