**11.8** La parabole d'axe parallèle à O$y$ s'écrit sous la forme $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
Elle passe par A$(-2\,;-2)$ : $-2 = a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c \iff 4\,a-2\,b+c=-2$.
Elle passe par B$(-\frac{3}{2}\,;0)$ : $0 = a\cdot(-\frac{3}{2})^2+b\cdot(-\frac{3}{2})+c \iff 9\,a-6\,b+4\,c=0$.
Elle passe par C$(0\,;0)$ : $0 = a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \iff c=0$.

La dernière équation donne immédiatement $c = 0$, de sorte que les deux premières équations se ramènent à $\begin{cases} 2\,a - \phantom{2}\,b = -1 \\ 3\,a - 2\,b = \phantom{-}0 \end{cases}$.

La première équation donne $b = 2\,a + 1$ que l'on substitue dans la seconde :
$3\,a - 2\,(2\,a+1) = -a - 2 = 0$, c'est-à-dire $a = -2$.
Enfin $b = 2\cdot(-2)+1 = -3$.

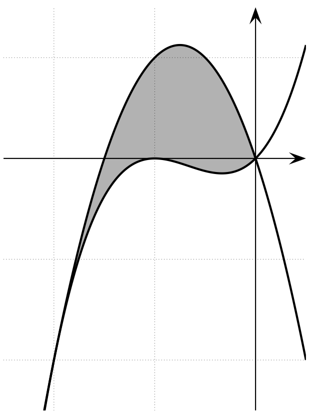
La parabole recherchée a ainsi pour équation $y = -2\,x^2 - 3\,x$.

Posons $f(x) = x^3 + 2\,x^2 + x$ et $g(x) = -2\,x^2 - 3\,x$.

Pour déterminer la position du graphe de la fonction $f$ par rapport à celui de la fonction $g$, étudions le signe de $f - g$ :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^3 + 2\,x^2 + x) - (-2\,x^2 - 3\,x) \\ &= x^3 + 4\,x^2 + 4\,x \\ &= x\,(x^2 + 4\,x + 4) \\ &= x\,(x+2)^2 \end{aligned}$$

| | $-2$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $+$ |
| $(x+2)^2$ | $+$ | | $+$ | $+$ |
| $f-g$ | $-$ | | $-$ | $+$ |



Calculons l'aire du domaine compris entre les graphes de $f$ et de $g$ :

$$-\int_{-2}^{0}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = -\int_{-2}^{0}(x^3+4\,x^2+4\,x)\,dx = -\big(\tfrac{1}{4}\,x^4+\tfrac{4}{3}\,x^3+2\,x^2\big)\Big|_{-2}^{0} =$$

$$-\Big(\big(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4+\tfrac{4}{3}\cdot 0^3+2\cdot 0^2\big)-\big(\tfrac{1}{4}\cdot(-2)^4+\tfrac{4}{3}\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2\big)\Big) =$$

$$-\big((0+0+0)-(4-\tfrac{32}{3}+8)\big) = -\big(0-\tfrac{4}{3}\big) = \tfrac{4}{3}$$