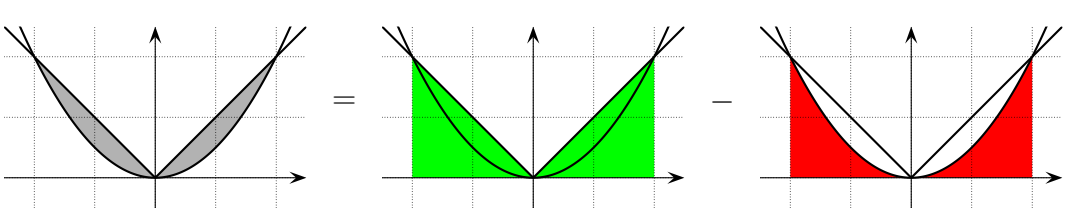
11.9



Les fonctions f et g sont paires :
$f(-x) = \frac{1}{2}\,(-x)^2 = \frac{1}{2}\,x^2 = f(x) \quad$ et $\quad g(-x) = |-x| = |x| = g(x)$

C'est pourquoi, $\text{aire}\Big(\big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\big\}\Big) =$

$$2 \cdot \text{aire}\Big(\big\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\big\}\Big)\,.$$

Déterminons les abscisses des points d'intersection des graphes de f et de g lorsque $x \geqslant 0$:
$\frac{1}{2}\,x^2 = |x|$
$\frac{1}{2}\,x^2 = x$
$0 = x - \frac{1}{2}\,x^2 = \frac{1}{2}\,x\,(2-x)$
$x = 0 \;$ ou $\; x = 2$

$$2 \cdot \left(\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 \tfrac{1}{2}\,x^2\,dx\right) = 2 \cdot \left(\int_0^2 \left(x - \tfrac{1}{2}\,x^2\right) dx\right) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{6}\,x^3 \Big|_0^2\right) =$$

$$2 \cdot \Big(\big(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - \tfrac{1}{6}\cdot 2^3\big) - \big(\tfrac{1}{2}\cdot 0^2 - \tfrac{1}{6}\cdot 0^3\big)\Big) = 2 \cdot \Big(\big(2 - \tfrac{4}{3}\big) - \big(0-0\big)\Big) = 2 \cdot \big(\tfrac{2}{3} - 0\big) = 2 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}$$