3 Limite et convergence d'une suite

3.1 Bernard s'entraîne pour le saut en hauteur. Le premier jour, il ne saute que 1 mètre de haut. Le lendemain, il atteint 1 m 50 ; les jours suivants, il progresse chaque jour de la moitié du progrès de la veille.

Soit u_n la hauteur que Bernard réussit à sauter le n^{e} jour.

1) Définir par une relation de récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Trouver une formule explicite pour u_n et démontrer cette formule par récurrence.
3) Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
5) Quand Bernard va-t-il battre le record du monde ? Quelle est la hauteur maximale qu'il va atteindre ?

3.2 **Suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tableur**

1) **Calcul des termes de la suite**

   (a) Ouvrir une feuille de calcul dans un tableur (par exemple *OpenOffice.org*) et la préparer comme sur la copie d'écran ci-contre.

	A	B	
1	raison =	0.8	
2			
3	n	u(n)	
4	0		

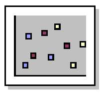
   (b) i. Entrer en A5 : `=A4+1`. Valider.

   ii. Sélectionner la cellule A5 et recopier vers le bas à l'aide de la poignée de recopie jusqu'en A104.

   (c) i. Entrer en B4 : `=$B$1^A4` et valider.

   ii. Recopier vers le bas jusqu'en B104 pour obtenir les premiers termes de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $q = 0{,}8$.

   (d) Sélectionner la plage de cellules de A4 à B30. Dans le menu *Insertion*, choisir d'insérer un diagramme. Choisir le type *Diagramme XY, Uniquement symboles* (voir le pictogramme ci-contre).

2) **Observation du comportement de la suite pour** $-1 < q < 1$

   (a) Entrer en B1 différentes valeurs de q telles que $-1 < q < 1$. Quel semble être le comportement de q^n quand n prend de très grandes valeurs ?

   (b) On cherche si tous les termes de la suite rentrent dans l'intervalle $]-0{,}1\,;0{,}1[$ à partir d'un certain rang. On prend ici $q = 0{,}5$ (à entrer en B1).

   i. Justifier que $q^n \in]-0{,}1\,;0{,}1[$ si et seulement si $|q^n| < 0{,}1$.

   ii. En E1, entrer : `0.1` . En C3, entrer : `test` .

   iii. En C4, entrer le test : `=SI(ABS(B4)<$E$1;"oui";"non")` .

   iv. Recopier cette formule vers le bas jusqu'en C104 .

v. Expliquer les résultats ainsi affichés en colonne C.

vi. Quel est le premier terme de la suite à être dans $]-0{,}1\,;0{,}1[$? Pourquoi est-on sûr que les termes suivants sont aussi dans l'intervalle $]-0{,}1\,;0{,}1[$?

vii. En modifiant E1, déterminer l'indice n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]-0{,}01\,;0{,}01[$; $]-0{,}001\,;0{,}001[$; $]-0{,}0001\,;0{,}0001[$.

(c) Reprendre les questions (b) vi. et (b) vii. pour $q = 0{,}9$; $q = 0{,}2$ puis pour $q = -0{,}9$; $q = -0{,}2$. On pourra présenter les résultats dans un tableau.

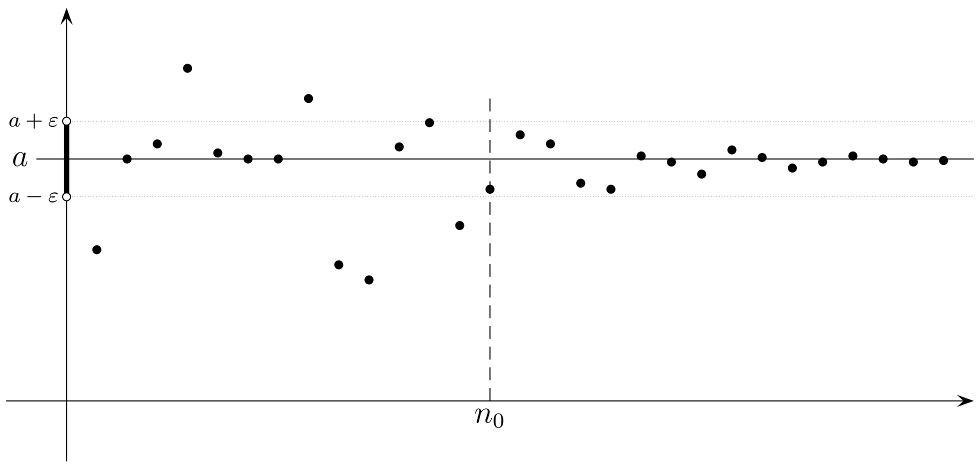
Définition d'une suite convergente et de la limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

Un nombre réel a est appelé **limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre a .

On dit d'une suite qui ne converge pas qu'elle **diverge**.



La valeur $|u_n - a|$ mesure la distance entre le terme u_n et la limite a.

Le nombre ε est un nombre réel strictement positif ; il est arbitrairement petit.

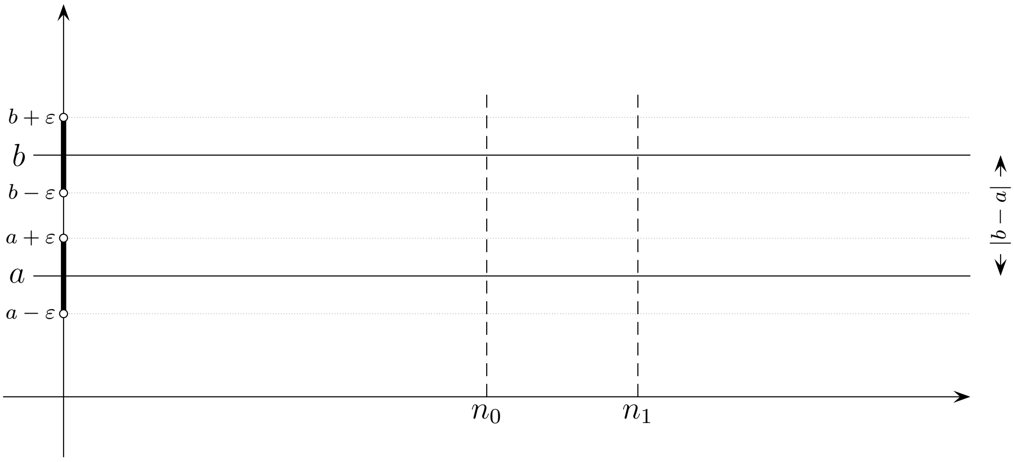
L'entier n_0 indique un rang à partir duquel ($n \geqslant n_0$) tous les termes de la suite sont « ε-proches » de a.

Cette définition formelle exprime que u_n est arbitrairement proche de a, dès que n est suffisamment grand.

Théorème *Si une suite admet une limite, cette limite est unique.*

On parlera donc de **la** limite d'une suite.

Preuve Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Supposons qu'elle converge aussi vers b avec $a \neq b$.



Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $]\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,[\,\cap\,]\,b-\varepsilon\,;b+\varepsilon\,[= \varnothing$.
(Il suffit pour cela de choisir $\varepsilon < \frac{1}{2}\,|b-a|$.)

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in]\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,[$.

De même, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait $|u_n - b| < \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in]\,b-\varepsilon\,;b+\varepsilon\,[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_1$. Alors $n \in]\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,[\,\cap\,]\,b-\varepsilon\,;b+\varepsilon\,[$ contredisant l'hypothèse que cette intersection est vide. On conclut qu'il est impossible que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites distinctes a et b.

3.3 Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \dfrac{2\,n-1}{n}$ converge vers 2.

3.4 Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

3.5 Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = 1 + \dfrac{1}{10^n}$ converge vers 1.

3.6 Justifier que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1, tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

3.7 Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = (-1)^n$ diverge.

3.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a.

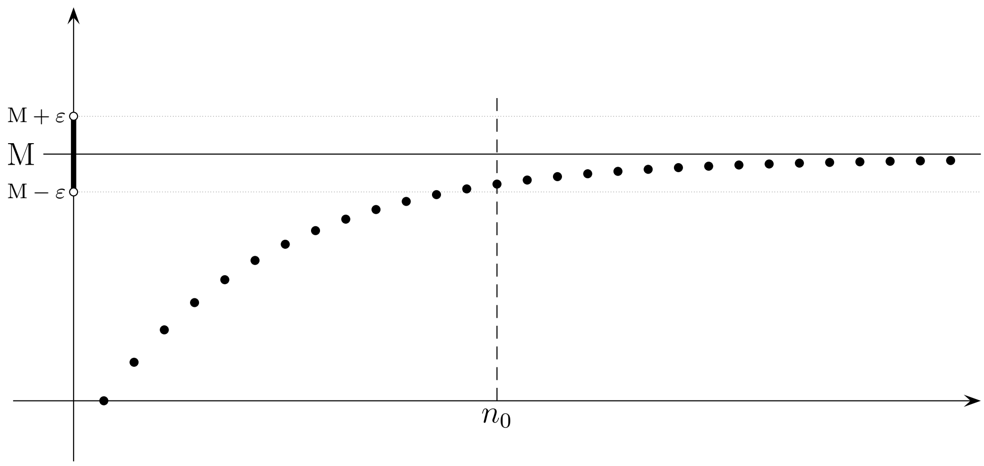
1) Justifier qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes en dehors de l'intervalle $]\,a-1\,;a+1\,[$.
2) Donner un réel m et un réel M tels que $m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Quelle propriété a-t-on ainsi démontrée ?

3.9 Est-il vrai que toute suite bornée est convergente ?

3.10 Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = 2\,n+1$ diverge.

Théorème *Toute suite croissante et majorée converge.*

Preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Désignons par M sa borne supérieure, c'est-à-dire son plus petit majorant.



Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{M} - \varepsilon < u_{n_0}$:
dans le cas contraire, $\mathrm{M} - \varepsilon \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $\mathrm{M} - \varepsilon$ est un majorant de la suite, qui est plus petit que M, contredisant la définition de la borne supérieure.

Étant donné que la suite est croissante, on a $\mathrm{M} - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \geqslant n_0$. En d'autres termes, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|u_n - \mathrm{M}| < \varepsilon$.

On a ainsi montré qu'une suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

3.11 Prouver le théorème suivant :

Théorème *Toute suite décroissante et minorée converge.*

3.12 Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2\,n+3}{n+1}$ converge.

3.13 Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2-1}{(n+2)\,(n+3)}$ converge.

Théorème *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent respectivement vers a et b, et si λ est un nombre réel, alors :*

1) *la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $a + b$;*
2) *la suite de terme général $\lambda\, u_n$ converge vers $\lambda\, a$;*
3) *la suite de terme général $u_n\, v_n$ converge vers $a\, b$;*
4) *la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{a}{b}$, si $b \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve

1) Soit $\varepsilon > 0$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on ait $|v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $n_2 = \max(n_0\,;n_1)$. Alors pour tout $n \geqslant n_2$, on a :
$|(u_n+v_n)-(a+b)| = |u_n - a + v_n - b| \leqslant |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2) Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Supposons $\lambda = 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\lambda\, u_n - \lambda\, a| = |0 \cdot u_n - 0 \cdot a| = 0 < \varepsilon$.
   (b) Supposons $\lambda \neq 0$.
   Vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
   Pour tout $n \geqslant n_0$ on a :
   $|\lambda\, u_n - \lambda\, a| = |\lambda\,(u_n - a)| = |\lambda|\,|u_n - a| < |\lambda|\,\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

3) Soit $\varepsilon > 0$.
D'après l'exercice 3.8, toute suite convergente est bornée. Il existe donc $\mathrm{M} > 0$ tel que $|u_n| < \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|b|}$ pour tout $n \geqslant n_0$.
Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{M}}$ pour tout $n \geqslant n_1$.
Posons $n_2 = \max(n_0\,;n_1)$. Alors pour tout $n \geqslant n_2$, on a :
$|u_n\, v_n - a\, b| = |u_n\, v_n - u_n\, b + u_n\, b - a\, b| \leqslant |u_n\, v_n - u_n\, b| + |u_n\, b - a\, b| =$
$|u_n|\,|v_n - b| + |b|\,|u_n - a| < \mathrm{M}\,\dfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{M}} + |b|\,\dfrac{\varepsilon}{2\,|b|} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4) Au vu de la précédente propriété, il suffit de prouver que la suite de terme général $\dfrac{1}{v_n}$ converge vers $\dfrac{1}{b}$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - b| < \frac{1}{2}\, b^2\, \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$.
Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - b| < \frac{1}{2}\,|b|$ pour tout $n \geqslant n_1$. Par conséquent, $|b| = |b - v_n + v_n| \leqslant |b - v_n| + |v_n| = |v_n - b| + |v_n| < \frac{1}{2}\,|b| + |v_n|$ c'est-à-dire $|v_n| > \frac{1}{2}\,|b|$ pour tout $n \geqslant n_1$. Il en résulte que $\dfrac{1}{|v_n|} < \dfrac{2}{|b|}$ pour tout $n \geqslant n_1$.
Posons $n_2 = \max(n_0\,;n_1)$. Alors pour tout $n \geqslant n_2$, on a :
$\left|\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \left|\dfrac{b - v_n}{v_n\, b}\right| = |v_n - b|\,\dfrac{1}{|v_n|}\,\dfrac{1}{|b|} < \dfrac{b^2\,\varepsilon}{2}\,\dfrac{2}{|b|}\,\dfrac{1}{|b|} = \varepsilon.$

Remarque Les opérations sur les limites permettent de calculer les limites directement :

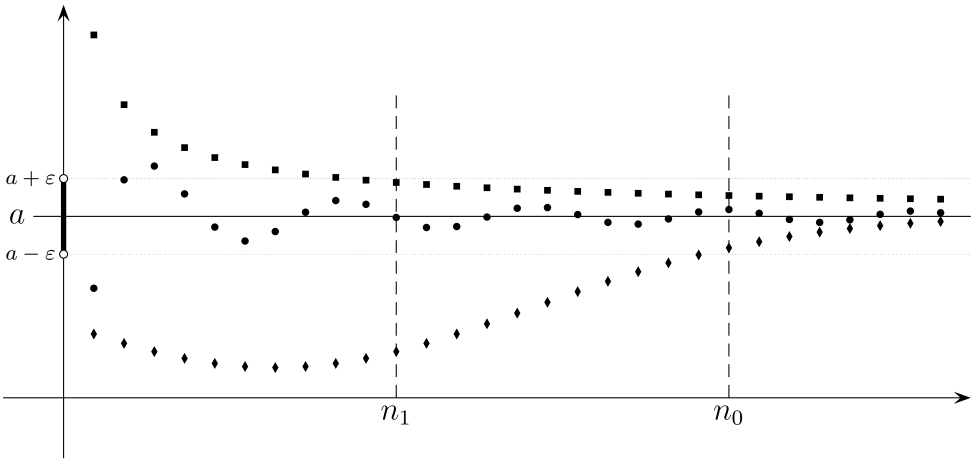
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\,n^2 - 2\,n + 3}{5\,n^2 - 7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\,(2 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^2\,(5 - \frac{7}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{5 - \frac{7}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

3.14 Calculer les limites suivantes et justifier :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\,n+1}{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n-3}{7\,n}$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n+3}{n+1}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n}$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3\,n}{3\,n^2+4}$ 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3\,n+2}{n^2+1}$

Théorème des gendarmes *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite a, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers a.*



Preuve Soit $\varepsilon > 0$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in \left]\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon \,\right[$.

De même, puisque la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait $|w_n - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire $w_n \in \left]\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon \,\right[$.

Posons $n_2 = \max(n_0\,; n_1)$. Alors pour tout $n \geqslant n_2$ on a $u_n \in \left]\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon \,\right[$, $w_n \in \left]\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon \,\right[$ et aussi $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, de sorte que $v_n \in \left]\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon \,\right[$, c'est-à-dire $|v_n - a| < \varepsilon$.

3.15 Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

3.16 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.

Indication : montrer que $0 < u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

3.17 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.

3.18 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2) En déduire que $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

3.19 On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n)\ , n \geqslant 1 \end{cases}$.

1) En prenant pour unité graphique 2 cm, représenter très soigneusement le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;9]$ ainsi que la droite d d'équation $y = x$.

2) (a) Placer u_1 sur l'axe des abscisses.

   (b) Sachant que $u_2 = f(u_1)$, placer u_2 sur l'axe des ordonnées par construction graphique.

   (c) Soit A_2 le point de la droite d d'ordonnée u_2. Quelle est son abscisse ? Placer u_2 sur l'axe des abscisses.

3) Sachant que $u_3 = f(u_2)$, expliquer comment placer u_3 sur l'axe des abscisses. Effectuer la construction.

4) Expliquer comment placer u_4 sur l'axe des abscisses.

5) Effectuer de même la construction pas à pas des termes u_5, u_6, …, u_{10} sur l'axe des abscisses.

6) Quelle conjecture peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de cette représentation graphique ?

3.20 L'exercice précédent a conduit à ce constat : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$; si cette suite converge, alors sa limite vérifie l'équation $f(a) = a$.

Intéressons-nous à la réciproque de cette propriété en considérant la suite définie par $\begin{cases} u_1 = k \\ u_{n+1} = (u_n)^2\ , n \geqslant 1 \end{cases}$.

1) En admettant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle pourra être sa limite ?

2) Déterminer la convergence de la suite lorsque $k = \frac{1}{2}$, $k = 1$ et $k = 2$.

3) Que doit-on en conclure ?

3.21 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suggérée par

$$\sqrt{1}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}\,;\quad \ldots$$

1) Définir cette suite par une relation de récurrence.

2) Montrer que cette suite est convergente.

3) Calculer la limite de cette suite.

3.22 Justifier l'algorithme d'Héron d'Alexandrie (savant grec du I[er] siècle après J.-C.) qui permet de s'approcher de la racine carrée d'un nombre réel positif p à partir d'une valeur initiale positive u_0 en itérant la formule récursive :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{p}{u_n}\right)$$

Réponses

3.1 1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1{,}50 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(u_n - u_{n-1}\right),\, n \geqslant 2 \end{cases}$ 2) $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

3.8 3) *Toute suite convergente est bornée.*

3.14 1) 3 2) $\frac{2}{7}$ 3) 2
4) 0 5) $\frac{1}{3}$ 6) 0

3.15 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

3.16 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n = 0$

3.17 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$

3.18 3) 0

3.19 6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 2 + 2\sqrt{3} \approx 5{,}464$

3.20 1) 0 ou 1
2) $k = \frac{1}{2}$: la suite converge vers 0 ;
$k = 1$: la suite converge vers 1 ;
$k = 2$: la suite diverge.
3) L'existence de solutions de l'équation $f(a) = a$ n'implique pas la convergence de la suite.

3.21 1) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{1} \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n},\, n \geqslant 1 \end{cases}$
2) Cette suite est croissante et majorée.
3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ (le nombre d'or)