**3.1** 1) $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\underbrace{(u_n - u_{n-1})}_{\text{progrès de la veille}}$ pour tout $n \geqslant 2$

On pose donc $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1{,}50 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}),\ n \geqslant 2 \end{cases}$

2) Calculons les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$u_1 = 1$

$u_2 = 1{,}50 = \frac{3}{2}$

$u_3 = u_2 + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{7}{4}$

$u_4 = u_3 + \frac{1}{2}(u_3 - u_2) = \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}$

$u_5 = u_4 + \frac{1}{2}(u_4 - u_3) = \frac{15}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{8} - \frac{7}{4}\right) = \frac{31}{16}$

L'examen des premiers termes conduit à la conjecture suivante :

$u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ .

Prouvons-la par récurrence.

**Initialisation**

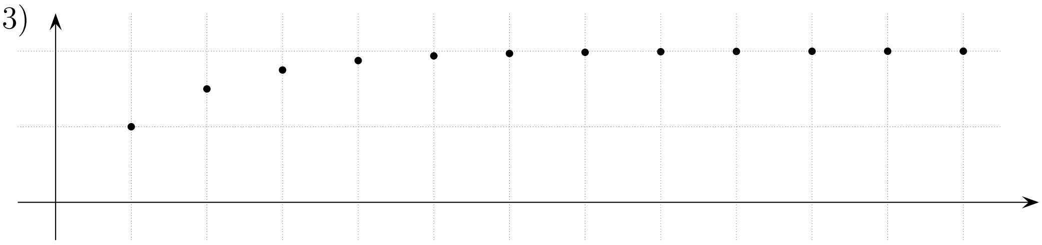
$2 - \frac{1}{2^{1-1}} = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{1} = 1 = u_1$

$2 - \frac{1}{2^{2-1}} = 2 - \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = u_2$

**Hérédité** Supposons $n \geqslant 2$, $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $u_{n-1} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \tfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

3)



4) $u_{n+1} - u_n = \left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) - \left(2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} - \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} > 0$

   En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} > u_n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
   En effet, $2 - u_n = 2 - \left(2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$ ou si l'on préfère $2 > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2, Bernard ne va pas dépasser 2 m, de sorte qu'il ne battra jamais le record du monde.
   Bernard va s'approcher indéfiniment de 2 m, mais sans jamais les franchir.