3.12 Calculons les premiers termes de la suite :

$u_1 = \frac{2\cdot 1+3}{1+1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
$u_2 = \frac{2\cdot 2+3}{2+1} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$
$u_3 = \frac{2\cdot 3+3}{3+1} = \frac{9}{4} = 2{,}25$
$u_4 = \frac{2\cdot 4+3}{4+1} = \frac{11}{5} = 2{,}2$
$u_5 = \frac{2\cdot 5+3}{5+1} = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$
$u_6 = \frac{2\cdot 6+3}{6+1} = \frac{15}{7} \approx 2{,}14$
$u_7 = \frac{2\cdot 7+3}{7+1} = \frac{17}{8} = 2{,}125$

Au vu de ces résultats, il semblerait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et minorée par 2.

1) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \frac{2\,n+3}{n+1} - \frac{2\,(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{2\,n+3}{n+1} - \frac{2\,n+5}{n+2} \\ &= \frac{(2\,n+3)\,(n+2)-(2\,n+5)\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \frac{2\,n^2+4\,n+3\,n+6-2\,n^2-2\,n-5\,n-5}{(n+1)\,(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

2) Prouvons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2 :

$$u_n - 2 = \frac{2\,n+3}{n+1} - 2 = \frac{2\,n+3-2\,(n+1)}{n+1} = \frac{2\,n+3-2\,n-2}{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Puisque toute suite décroissante et minorée converge, on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.