3.13 Calculons les premiers termes de la suite :

$u_1 = \frac{1^2-1}{(1+2)\cdot(1+3)} = \frac{0}{12} = 0$

$u_2 = \frac{2^2-1}{(2+2)\cdot(2+3)} = \frac{3}{20} = 0{,}15$

$u_3 = \frac{3^2-1}{(3+2)\cdot(3+3)} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \approx 0{,}27$

$u_4 = \frac{4^2-1}{(4+2)\cdot(4+3)} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36$

$u_5 = \frac{5^2-1}{(5+2)\cdot(5+3)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$

$u_6 = \frac{6^2-1}{(6+2)\cdot(6+3)} = \frac{35}{72} \approx 0{,}49$

S'il semble bien que la suite soit croissante, il s'avert en revanche plus difficile de deviner un majorant.

Le calcul $u_{1000} = \frac{1000^2-1}{(1000+2)\cdot(1000+3)} = \frac{999\ 999}{1\ 005\ 006} \approx 0{,}995$ prête à penser que 1 est un majorant.

1) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2-1}{\big((n+1)+2\big)\,\big((n+1)+3\big)} - \frac{n^2-1}{(n+2)\,(n+3)} \\
&= \frac{n^2+2\,n}{(n+3)\,(n+4)} - \frac{n^2-1}{(n+2)\,(n+3)} \\
&= \frac{(n^2+2\,n)\,(n+2)-(n^2-1)\,(n+4)}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} \\
&= \frac{n^3+2\,n^2+2\,n^2+4\,n-n^3-4\,n^2+n+4}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} \\
&= \frac{5\,n+4}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} > 0
\end{aligned}$$

2) Prouvons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 :

$$\begin{aligned}
1-u_n &= 1 - \frac{n^2-1}{(n+2)\,(n+3)} = \frac{(n+2)\,(n+3)-(n^2-1)}{(n+2)\,(n+3)} \\
&= \frac{n^2+3\,n+2\,n+6-n^2+1}{(n+2)\,(n+3)} = \frac{5\,n+7}{(n+2)\,(n+3)} > 0
\end{aligned}$$

Attendu que toute suite croissante et majorée converge, on conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.