3.14 Prouvons que suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a que $|u_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \left|\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon\,.$

On a ainsi montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\,n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,(3+\frac{1}{n})}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n} =$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n-3}{7\,n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,(2-\frac{3}{n})}{7\,n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{n}}{7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{7}\,(2-\frac{3}{n}) =$
$\frac{1}{7} \lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{3}{n} = \frac{1}{7}\,(\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}) = \frac{1}{7}\,(2-3\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}) = \frac{1}{7}\,(2-3\cdot 0) = \frac{2}{7}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n+3}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,(2+\frac{3}{n})}{n\,(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}} =$
$\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + 3\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} = \dfrac{2+3\cdot 0}{1+0} = \dfrac{2}{1} = 2$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2\,(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\,(1+\frac{1}{n})} =$
$\dfrac{1}{(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2)\cdot(\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2)\cdot(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n})} =$
$\dfrac{1}{(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2)\cdot(1+0)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n} =$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3\,n}{3\,n^2+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\,(1-\frac{3}{n})}{n^2\,(3+\frac{4}{n^2})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{4}{n^2}} =$
$\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}} = \dfrac{1-3\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}{3+4\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1-3\cdot 0}{3+4\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} =$
$\dfrac{1}{3+4\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3+4\cdot 0\cdot 0} = \dfrac{1}{3}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3\,n+2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\,(-3+\frac{2}{n})}{n^2\,(1+\frac{1}{n^2})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3+\frac{2}{n}}{n\,(1+\frac{1}{n^2})}=$

$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}-3+\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty}n\,(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}-3+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}}{(\lim\limits_{n\to+\infty}n)\cdot(\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n^2})}=\frac{-3+2\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}{(\lim\limits_{n\to+\infty}n)\cdot(\lim\limits_{n\to+\infty}1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2})}$$

$$=\frac{-3+2\cdot 0}{(\lim\limits_{n\to+\infty}n)\cdot(1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})}=\frac{-3}{(\lim\limits_{n\to+\infty}n)\cdot(1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n})}=$$

$$\frac{-3}{(\lim\limits_{n\to+\infty}n)\cdot(1+0\cdot 0)}=\frac{-3}{\lim\limits_{n\to+\infty}n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3}{n}=-3\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=-3\cdot 0=0$$