3.18 1) L'identité remarquable $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ avec $\mathrm{A} = \sqrt{n+1}$ et $\mathrm{B} = \sqrt{n}$ donne $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = n + 1 - n = 1$.

De là suit l'égalité $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

2) (a) $n < n+1$ implique $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ c'est-à-dire $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\,\sqrt{n}}$

On a ainsi prouvé que $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\,\sqrt{n}}$.

3) L'exercice 3.4 a établi que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\,\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Grâce au théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.