3.22 1) Montrons par récurrence que $u_n \geqslant \sqrt{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_1 - \sqrt{p} = \dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{p}{u_0}\right) - \sqrt{p} = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{p}{2\,u_0} - \sqrt{p} =$

$$\frac{u_0^2 + p - 2\,u_0\,\sqrt{p}}{2\,u_0} = \frac{u_0^2 - 2\,u_0\,\sqrt{p} + (\sqrt{p})^2}{2\,u_0} = \frac{(u_0 - \sqrt{p})^2}{2\,u_0} \geqslant 0$$

étant donné qu'un carré est nécessairement non négatif et que l'on suppose la valeur initiale u_0 positive.

Hérédité : Supposons que $u_n \geqslant \sqrt{p}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - \sqrt{p} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{p}{u_n}\right) - \sqrt{p} = \frac{u_n}{2} + \frac{p}{2\,u_n} - \sqrt{p} =$$

$$\frac{u_n^2 + p - 2\,u_n\,\sqrt{p}}{2\,u_n} = \frac{u_n^2 - 2\,u_n\,\sqrt{p} + (\sqrt{p})^2}{2\,u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{p})^2}{2\,u_n} \geqslant 0$$

vu qu'un carré doit être non négatif et que l'hypothèse de récurrence implique $u_n \geqslant \sqrt{p} \geqslant 0$.

2) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{p}{u_n}\right) = u_n - \frac{u_n}{2} - \frac{p}{2\,u_n} = \frac{u_n}{2} - \frac{p}{2\,u_n} = \frac{u_n^2 - p}{2\,u_n}$$

$$= \frac{(u_n + \sqrt{p})\,(u_n - \sqrt{p})}{2\,u_n} \geqslant 0$$

En effet, on a prouvé en 1) que $u_n \geqslant \sqrt{p} \geqslant 0$.

3) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et décroissante, elle converge.
Sa limite a doit vérifier l'équation

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{p}{a}\right)$$

$$2\,a = a + \frac{p}{a}$$

$$a - \frac{p}{a} = 0$$

$$a^2 - p = 0$$

$$(a + \sqrt{p})\,(a - \sqrt{p}) = 0$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{p}$, on conclut qu'elle doit converger vers $a = \sqrt{p}$.